

Algebros pratybos. Rimantas Grigutis

1 Pratybos. *Matematinė indukcija. Dalumo su liekana teorema.DBD. Tarpusavyje pirminiai skaičiai. Pirminiai skaičiai. Skaičių faktorizacija.*

1. Nustatykite, kokias liekanas galima gauti dalijant:

- 1) Sveiką skaičiaus kvadratą iš 7, 8, 10, 12, 13, 15, 20 ?
- 2) $n^3 + 5$ pavidalo skaičių iš 9 ?
- 3) $n^3 - 5$ pavidalo skaičių iš 9 ?
- 4) $2n^2 + 1$ pavidalo skaičių iš 6 ?
- 5) $3n^3 - 2$ pavidalo skaičių iš 6 ?

2. Įrodykite, kad su kiekvienu natūraliuoju skaičiumi n :

- 1) $6 \mid 14n^3 + 9n^2 + n$.
- 2) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.
- 3) $17 \mid 8 \cdot 5^{2n+1} - 3 \cdot 2^{3n+1}$.
- 4) $13 \mid 3^3 - 3^6 + 3^9 - \dots - 3^{6n}$.

3. Dalydami a iš b gauname liekaną $r \neq 0$.

- 1) Kokią liekaną gausime dalydami $-a$ iš b ?
- 2) Ar skaičius mr yra ta liekana, kurią gausime dalydami ma iš mb , kai $m \neq 0$?

Euklido algoritmas ir tiesinė DBD išraiška. Matrica Euklido algoritmui:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7605 \\ 0 & 1 & 5733 \end{bmatrix} & \xrightarrow{(-1) \uparrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1872 \\ 0 & 1 & 5733 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3) \downarrow} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1872 \\ -3 & 4 & 117 \end{bmatrix} & \xrightarrow{(-16) \uparrow} \begin{bmatrix} 49 & -65 & 0 \\ -3 & 4 & 117 \end{bmatrix} \implies \\ (7605, 5733) = 117 & \text{ ir } 117 = (-3) \cdot 7605 + 4 \cdot 5733 . \end{aligned}$$

4. Apskaičiuokite:

- 1) $(1776, 1492) =$
- 2) $(1274, 1089) =$
- 3) $(7605, 5733) =$
- 4) $(3553, 527) =$
- 5) $(95, 432) =$
- 6) $(23581, 75217) =$
- 7) $(6787, 7194) =$

$$8) \left(\underbrace{11\dots 1}_m, \underbrace{11\dots 1}_n \right) =$$

FIBONACCI skaičių apibrėžimas: $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

5. Įrodyti, kad $f_{5m}, m \geq 1$, dalijasi is 5. ($f_5 = 5; f_{5(m+1)} = 5 \cdot f_{5m+1} + 3 \cdot f_{5m}$)

FIBONACCI skaičių apibrėžimas matricomis:

$$f_0 = 0, \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$6. \text{ Įrodyti, kad } \forall n \in \mathbf{N}_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}.$$

7. Įrodyti, kad $\forall n, m \in \mathbf{N}, m > 1, f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}$.

8. Įrodyti, kad $f_{mn} \mid f_m$.

9. Įrodyti, kad $\text{DBD}(f_n, f_{n+1}) = 1$.

10. Įrodyti, kad $\text{DBD}(f_m, f_n) = f_{\text{DBD}(m,n)}$.

FERMAT faktorizacijos procesas:

Babilono laikų formulė $n = a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ sako, kad faktorizuojamą skaičių reikia rašyti dviejų kvadratų skirtumu: $n = r^2 - s^2$. Todėl:

(i) Apibrėžiame $r_0 = \lceil \sqrt{n} \rceil$;

(ii) Tikriname, ar $(r_0 + i)^2 - n$ yra pilnas kurio nors skaičiaus kvadratas, kai $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Jei $n + s^2$ nėra sveiką skaičiaus kvadratas, kai $s = 1, 2, \dots, \frac{n-3}{2}$, tai n - pirminis.

11. Faktorizuokite:

1) 2881;

2) 135337;

3) 2027651281;

4) 236273;

5) 438359;

6) 2091589.

12. Raskite natūralaus skaičiaus n daliklių skaičiaus $d(n)$ formulę. Remkitės skaičiaus n kanonišku skaidiniu.

13. Apskaičiuokite $d(n)$, kai $n = 5040; 84^{19}; 1000; 1350; 46200$.

14. Pateikite skaičiaus, turinčio a) lygiai 6 daliklius; b) lygiai 7 daliklius, pavyzdžius.
15. Apskritimas suskaidytas į 720 lygių lankų. Kiek skirtingų (pagal kraštinių skaičių) taisyklingų daugiakampių, kurių viršūnės yra lankų galuose, galite nubrėžti?
16. Kiek lyginių daliklių turi natūralusis skaičius n ? Kuriems n tai $-\frac{1}{2}d(n)$?
17. Įrodykite, kad su visais natūraliaisiais n intervale $[n + 1; n! + 1]$ egzistuoja pirminis skaičius.
18. Tegų $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3, \dots$ yra visų pirminių skaičių didėjanti seka. Tada
 (1) $p_{n+1} \leq 2p_n + 1$ (remkitės *Bertrand'o postulatu*: su visais natūraliaisiais $n > 1$ egzistuoja toks pirminis p , kad $n \leq p \leq 2n$).
 (2) $p_n \leq p_1 + p_2 + \dots + p_n, n \geq 1$.
19. Įrodykite, kad jeigu $(n, m) = 1$, tai $(2^m - 1, 2^n - 1) = 1$.
20. Raskite skaičiaus $n!$ kanoninį skaidinį.
21. Įrodykite, kad šešiaženklis skaičius $abcabc$ yra dalus iš 7, 11, 13.
22. Įrodykite, kad aštuoniaženklis skaičius $abcdabcd$ yra dalus iš 73, 137.