1. ANTROS EILĖS PAVIRŠIAI.

2-os eilės paviršiaus lygtis yra

$$P\left(x_1,...,x_n\right) = f_2\left(x_1,...,x_n\right) + f_1\left(x_1,...,x_n\right) + d = 0\ ,$$

čia f_2 - kvadratinė forma, of_1 - tiesinė forma, d- realusis skaičius.

Taigi, 2-os eilės paviršiaus lygtį galima užrašyti ir taip:

$$X^T AX + 2BX + d = 0\ ,$$

čia A - kvadratinės formos matrica (simetrinė), B - tiesinės formos eilutė.

Mūsų tikslas - gauti kanoninį 2-os eilės paviršiaus lygties pavidalą.

Galimi šie kintamųjų keitiniai:

1) Koordinačių pradžios perkėlimas: $X = Y + \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

2) Koordinačių sistemos posūkis apie koordinačių pradžią: $X = CY$, čia C -ortogonalioji matrica.

Taigi, leistinas keitinys yra

$$X = CY + F\ ,$$

čia C - ortogonalioji matrica, o F - stulpelis.

Tada,

$P = (CY + F)^T A (CY + F) + 2B(CY + F) + d = 0.$

$P = \left(Y^T C^T + F^T\right) A (CY + F) + 2B(CY + F) + d = 0.$

$P = Y^T \left(C^T AC\right) Y + F^T ACY + Y^T C^T AF + 2BCY + F^T AF + 2BF + d = 0.$

Turime, kad realusis skaičius

$Y^T C^T AF = \left(Y^T C^T AF\right)^T = F^T ACY.$

Pažymėję $d_1 = F^T AF + 2BF + d$, turėsime

$P = Y^T \left(C^T AC\right) Y + 2\left(F^T A + B\right) CY + d_1 = 0.$

2-osios eilės paviršius vadinamas *centriniu*, jeigu jo lygtyje galima panaikinti tiesinę dalį, t.y.egzistuoja F- stulpelis, C - ortogonalioji matrica, kad

$\left(F^T A + B\right) C = 0 \Longleftrightarrow F^T A + B = 0 \Longleftrightarrow F^T A = -B.$

Paskutinioji lygybė - tai tiesinų lygčių sistema, kurios matrica yra A. Taigi, centrinio paviršiaus kriterijus yra

$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

Centriniai paviršiai.

Dabar nagrinėkime centrinį paviršių, t.y. egzituoja toks leistinas keitinys $X = CY + F$, kad $F^T A + B = 0$.

Beto, ortogonaliąją matricą C galima parinkti taip, kad $C^T AC = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ - diagonalinė matrica(teorema 5).

Gauname centrinio 2-osios eilės paviršiaus lygtį

$P(y_1, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + d_1 = 0$.

Galimi šie atvejai.

1) $d_1 \neq 0$.

$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + d_1 = 0$;

$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = -d_1$;

$\mu_1 y_1^2 + \cdots + \mu_n y_n^2 = 1$,

čia $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{-d_1}$.

Tegu $\mu_1, ..., \mu_r > 0, \mu_{r+1}, ..., \mu_s < 0, \mu_{s+1}, ..., \mu_n = 0$.

Pažymėkime $a_i = \sqrt{\dfrac{1}{|\mu_i|}}, i = 1, ..., s$. Tada turėsime paviršiaus lygtį:

$$\boxed{\frac{y_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{y_r^2}{a_r^2} - \frac{y_{r+1}^2}{a_{r+1}^2} - \cdots - \frac{y_s^2}{a_s^2} = 1}$$

.

Jeigu $s = n$, tai, kai

1.1) $r = n$ - tai paviršius vadinamas *elipsoidu.*

1.2) $1 \leq r < n$ - tai paviršius vadinamas *hiperboloidu.*

1.3) $r = 0$- tai turime $\emptyset$.

2) $d_1 = 0$.

$$\boxed{\frac{y_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{y_r^2}{a_r^2} - \frac{y_{r+1}^2}{a_{r+1}^2} - \cdots - \frac{y_s^2}{a_s^2} = 0}$$

.

Kai $r \geq \dfrac{s}{2}$, paviršius vadinamas *kūgiu.* Dažniausiai nagrinėjami *pilnieji kūgiai,* kuriems $s = n, r = \left[\dfrac{n+1}{2}\right], ..., n$.

Necentriniai paviršiai.

$P = Y^T \left(C^T AC\right) Y + \left(2F^T A + B\right) CY + d_1 = 0$;

Pažymėję $B_1 = \left(2F^T A + B\right) C$, turėsime

$P = Y^T \left(C^T AC\right) Y + B_1 Y + d_1 = 0$.

Galime rasti tokią ortogonaliąją matricą C, kad $C^T AC = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ - diagonalinė matrica(teorema 5). Beto, tegu $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_s < 0$. Kadangi $F^T A + B \neq 0$, t.y. matrica$A$ yra išsigimusi, turime, kad $s < n$.

Taigi, gauname paviršiaus lygtį:

$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_r y_r^2 + \lambda_{r+1} y_{r+1}^2 + \dots + \lambda_s y_s^2 + b'_1 y_1 + \dots + b'_n y_n + d_1 = 0.$

Atlikime kintamųjų keitinį:

$$\begin{aligned}
&y_1 = z_1 - \frac{b_1}{2\lambda_1}\\
&\dots\\
&y_s = z_s - \frac{b_s}{2\lambda_s}\\
&y_{s+1} = z_{s+1}\\
&\dots\\
&y_n = z_n.
\end{aligned}$$

Gausime

$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_s z_s^2 + b_{s+1} z_{s+1} + \dots + b_n z_n + d_2 = 0.$

Iš likusių pirmųjų laipsnių paliksime vieną. Pažymėkime $b = b_{s+1}^2 + \dots + b_n^2 > 0$. Tada, paskutiniąją lygybę paliję iš $\sqrt{b}$, turėsime

$\mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_s z_s^2 + c_{s+1} z_{s+1} + \dots + c_n z_n + d_3 = 0,$

čia $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{\sqrt{b}}, c_j = \dfrac{b_i}{\sqrt{b}}$ ir $c_{s+1}^2 + \dots + c_n^2 = 1$.

Papildykime normuotą stulpelį $\begin{pmatrix} c_{s+1} \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$ iki ortogonaliosios matricos D ir atlikime kintamųjų keitinį:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_s \\ z_{s+1} \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_s \\ u_{s+1} \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_s \\ z_{s+1} \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_s \\ u_{s+1} \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_s \\ z_{s+1} \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_s \\ u_{s+1} \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix},$$

taigi

$$\begin{aligned} u_1 &= z_1 \\ &\dots \\ u_s &= z_s \\ u_{s+1} &= c_{s+1} z_{s+1} + \dots + c_n z_n \\ &\dots \end{aligned}$$

ir
$\mu_1 u_1^2 + \dots + \mu_s u_s^2 + u_{s+1} + d_3 = 0.$
Atliksime paskutinį kintamųjų keitinį

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ &\dots \\ u_s &= v_s \\ u_{s+1} &= -v_{s+1} - d_3 \end{aligned} .$$

Gauname kanoninį necentrinio paviršiaus lygties pavidalą:

$$\boxed{v_{s+1} = \frac{v_1^2}{2p_1} + \dots + \frac{v_r^2}{2p_r} - \frac{v_{r+1}^2}{2p_{r+1}} - \dots - \frac{v_s^2}{2p_s}}$$
,
čia $|\mu_i| = \dfrac{1}{2p_i}$, $r > 0, s+1 \leq n.$
Kai $s + 1 = n$ paviršius vadinamas *paraboloidu.*
Kai $r = s = n - 1$ paviršius vadinamas *elipsiniu paraboloidu.*
Kai $r < s$ paviršius vadinamas *hiperboliniu paraboloidu.*
Panagrinėkime centrinius ir necentrinius paviršius , kai $n = 1, 2, 3.$
1) $\underline{n = 1.}$
<u>Centriniai paviršiai.</u>
$r \leq s, s > 0.$
Kai $r = 1$, tai $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$: du taškai tiesėje.
Kai $r = 0$, tai -$\dfrac{x^2}{a^2} = 1$: $\emptyset$.

Necentrinių paviršių **nėra**, nes būtinai turi būti $s < n$.

2) $n = 2.$

Centriniai paviršiai.

Kai $s = 1, r = 1$, tai $\frac{x^2}{a^2} = 1$: dvi lygiagrečios tiesės.

Kai $s = 1, r = 0$, tai -$\frac{x^2}{a^2} = 1$: $\emptyset$.

Kai $s = 2, r = 2$,

tai $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: elipsė;

tai $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$: taškas.

Kai $s = 2, r = 1$,

tai $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: hiperbolė;

tai $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: dvi susikertančios tiesės.

Kai $s = 2, r = 0.$,

tai -$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\emptyset$.

tai -$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$: taškas.

Necentriniai paviršiai.

Kai $s = r = 1$,

tai $y = \frac{x^2}{2p}$: parabolė.

3) $n = 3.$

Centriniai paviršiai.

Kai $s = 1, r = 1$,

tai $\frac{x^2}{a^2} = 1$: dvi lygiagrečios plokštumos;

tai $\frac{x^2}{a^2} = 0$: viena plokštuma.

Kai $s = 1, r = 0$,

tai -$\frac{x^2}{a^2} = 1$: $\emptyset$.

tai -$\frac{x^2}{a^2} = 0$: viena plokštuma.

Kai $s = 2, r = 2$,

tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: elipsinis cilindras;
tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$: viena tiesė.
Kai $s=2, r=1$,
tai $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: hiperbolinis cilindras;
tai $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$: dvi susikertančios plokštumos.
Kai $s=2, r=0.$,
tai -$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$: $\emptyset$.
tai -$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$: viena tiesė.
Kai $s=3, r=3$,
tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$: elipsoidas;
tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$: taškas.
Kai $s=3, r=2$,
tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$: vienašakis hiperboloidas;
tai $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$: kūgis.
Kai $s=3, r=1$,
tai $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$: dvišakis hiperboloidas;
tai $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$: kūgis.
Kai $s=3, r=0$,
tai -$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$: $\emptyset$;
tai -$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$: taškas.
<u>Necentriniai paviršiai.</u>
Kai $s=r=1$,
tai $y=\frac{x^2}{2p}$: parabolinis cilindras.
Kai $s=2, r=2$,
tai $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$: elipsinis paraboloidas.

Kai $s=2, r=1$,

tai $z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}$: hiperbolinis paraboloidas.

Pavyzdys 1.

Raskite lygties

$P\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3+12x_1-8x_2+8x_3+6=0$

kanoninį pavidalą. Kokio paviršiaus ši lygtis?

$$P=X^T\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}X+2\left(6,-4,4\right)X+6=0.$$

Tai centrinio paviršiaus lygtis, nes sistema $AF=-B^T$ turi sprendinį:

$$\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\4\\-4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Atliekame kintamųjų keitinį $X=Y+\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$:

$P=2y_1^2+y_2^2-4y_1y_2-4y_2y_3-8=0.$

$$P=Y^T\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}Y-8=0$$

Atliekame ortogonalųjį kintamųjų keitinį $Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}Z$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

$P=4z_1^2+z_2^2-2z_3^2-8=0$

$$P=Z^T\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}Z-8=0$$

$\dfrac{z_1^2}{2}+\dfrac{z_2^2}{8}-\dfrac{z_3^2}{4}=1$ - vienašakis hiperboloidas.

Pavyzdys 2.

Raskite lygties

$P\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_2+2x_2x_3+10x_2+1=0$

kanoninį pavidalą. Kokio paviršiaus ši lygtis?

Tai necentrinio paviršiaus lygtis, nes sistema $AF = -B^T$ neturi sprendinio.
Atliekame ortogonalųjį keitinį:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} Y$$

ir gauname lygtį

$$P = 5y_1^2 + 2y_2^2 + 10\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3\right) + 1 = 0$$

$$P = Y^T \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y + 10\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}y_3\right) Y = 0.$$

Atliekame kintamųjų keitinį

$$Y = Z + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{5}{2\sqrt{6}} \\ -\frac{11\sqrt{2}}{40} \end{pmatrix}$$

tam ,kad panaikinti narius su y_1 ir y_2 ir laisvąjį narį.
Gauname lygtį
$5z_1^2 + 2z_2^2 = 5\sqrt{2}z_3$ - tai elipsinio paraboloido lygtis.