

ALGEBROS KONTROLINIS DARBAS 1, Rimantas Grigutis, 2001 03 20

*Uždaviniai suskirstyti temomis (tai nurodo pirmasis uždavinio numerio skaičius). Uždavinio vertę nurodo antrasis numerio skaičius (1=7 t.; 2=8 t.; 3=9 t.; 4=10 t.). Vertinamas tik vienas temos uždavinys, kurį vertinimui apibraudami pasirenkate patys (jei temos uždavinys neapibrauktas arba apibraukti du temos uždaviniai, tai tema vertinama 0). Atsakymus rašyti būtina. Sprendimus pagrįsti skaičiavimais ir (arba) samprotavimais. Kiekvieną uždavinį spręskite atskirame lape.*

1.1. *FERMAT* faktorizacijos procesas: 160477

1.2. Įrodykite:  $3^3 - 3^6 + 3^9 - \dots - 3^{6n}$  dalijasi iš 13 su visiais  $n \in \mathbf{N}$ .

1.3. Apskaičiuokite: BDD(23581, 75217)

1.4. Įrodykite, kad šešiaženklis skaičius  $abcabc$  yra dalus iš 11.

2.1. Apskaičiuokite:  $13^{9999} \pmod{1000}$ .

2.2. Išspręskite lyginių sistemą: 
$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{11} \\ 5x \equiv 3 \pmod{13} \\ 7x \equiv 1 \pmod{15} \end{cases} .$$

2.3. Įrodykite:  $(m+n)^p \equiv m^p + n^p \pmod{p}$ , su pirminiu  $p$  ir  $m, n \in \mathbf{Z}$ .

2.4. Ar primityviųjų klasių multiplikacinių grupė  $U_n$ ,  $n=8$ , yra ciklinė.

3.1 Raskite  $a, b, c$ , kad dalydami polinomą  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  iš  $x^2 + x + 1$ , gautume liekaną  $x + 1$ , o dalydami  $f(x)$  iš  $x - 1$ , gautume liekaną: 18.

3.2. Dalydami  $f(x)$  dalijant iš  $x - 2$ , gaunama liekana 1, o dalijant iš  $x + 2$ , gaunama liekana  $-1$ , o dalijant iš  $x - 3$  - liekana 3. Kokia liekana gaunama dalijant polinomą  $f(x)$  iš  $(x^2 - 4)(x - 3)$ ?

3.3. Raskite racionaliąsias polinomo  $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 6$  šaknis.

3.4. Raskite  $x^5 - 10x^4 + 24x^3 + 9x^2 - 33x - 12$  kanoninį skaidinį virš  $\mathbf{Q}$ .

4.1. Raskite  $d(x) = \text{DBD}(x^5 + x^3 + 1, x^6 + x^5 + x^4 + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$  tiesinę išraišką.

4.2. Parodykite, kad visi *nenuliniai* kūno  $\mathbf{Z}_3[x]/(x^2 + x + 2)$  elementai yra elemento  $[x + 1]$  laipsniai.

4.3. Atlikite bekvadratę polinomo  $2x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 5x^2 + 12x - 9$  faktorizaciją.

4.4. Atlikite veiksmus faktoržiede  $\mathbf{Q}[x]/(m(x)) : \frac{x^2 + 2}{x - 3}$ ,  $m(x) = x^3 + x + 1$

5.1. Atlikite veiksmus :2)  $\frac{(2 - 3i)^3 + (4 - i)^3}{(1 - i)^2}$ .

5.2.  $(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$ .

5.3. Faktorizuokite polinomą  $x^{11} - 1$  virš  $\mathbf{R}$ .

5.4.  $\log_{\sqrt{3}} \frac{|z - 3i|^2 - |z - 3i| + 1}{2 + |z - 3i|} < 2$ .

ALGEBROS KONTROLINIS DARBAS 1, Rimantas Grigutis, 2001 03 20

*Uždaviniai suskirstyti temomis (tai nurodo pirmasis uždavinio numerio skaičius).*

*Uždavinio vertę nurodo antrasis numerio skaičius (1=7 t.; 2=8 t.; 3=9 t.; 4=10 t.). Vertinamas tik vienas temos uždavinys, kurį vertinimui apibraudami pasirenkate patys (jei temos uždavinys neapibrauktas arba apibraukti du temos uždaviniai, tai tema vertinama 0). Atsakymus rašyti būtina. Sprendimus pagrįsti skaičiavimais ir (arba) samprotavimais. Kiekvieną uždavinį spręskite atskirame lape.*

1.1. *FERMAT faktorizacijos procesas:* 193519

1.2. Įrodyti, kad  $f_{5m}$ ,  $m \geq 1$ , dalijasi iš 5. ( $f_0 = 0, f_1 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ).

1.3. Apskaičiuokite: BDD(25581, 75317).

1.4. Įrodykite, kad šešiaženklis skaičius  $abcabc$  yra dalus iš 13.

2.1. Apskaičiuokite:  $11^{9999} \pmod{1000}$ .

2.2. Išspręskite lyginių sistemą: 
$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{11} \\ 5x \equiv 1 \pmod{13} \\ 7x \equiv 3 \pmod{15} \end{cases} .$$

2.3 Įrodykite:  $(m+n)^p \equiv m^p + n^p \pmod{p}$ , su pirminiu  $p$  ir  $m, n \in \mathbf{Z}$ .

2.4. Ar primityviųjų klasių multiplikacinių grupė  $U_n$ ,  $n = 12$ , yra ciklinė.

3.1. Raskite  $a, b, c$ , jei polinomui  $f(x) = x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + c$ ,  $-1$  yra antro kartotinumų šaknis, o  $1$  – paprastoji jo šaknis.

3.2. Dalydami  $f(x)$  dalijant iš  $x - 2$ , gaunama liekana 1, o dalijant iš  $x + 2$ , gaunama liekana  $-1$ , o dalijant iš  $x - 3$  - liekana 3. Kokia liekana gaunama dalijant polinomą  $f(x)$  iš  $(x^2 - 4)(x - 3)$ ?

3.3. Raskite racionaliąsias polinomo  $f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 11x - 6$  šaknis.

3.4. Raskite  $x^5 - 10x^4 + 24x^3 + 9x^2 - 33x - 12$  kanoninį skaidinį virš  $\mathbf{Q}$ .

4.1. Raskite  $d(x) = \text{DBD}(x^5 + x + 1, x^6 + x^5 + x^3 + 1) \in \mathbf{Z}_2[x]$  tiesinę išraišką.

4.2. Parodykite, kad ne visi *nenuliniai* kūno  $\mathbf{Z}_3[x] / (x^2 + 2x + 2)$  elementai yra elemento  $[x]$  laipsniai.

4.3. Atlikite bekvadratę polinomo  $2x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 24x - 9$  faktorizaciją.

4.4. Atlikite veiksmus faktoržiede  $\mathbf{Q}[x] / (m(x)) : \frac{x^2 + 2}{x - 5}$ ,  $m(x) = x^3 + x + 1$ .

5.1. Atlikite veiksmus: 
$$\frac{(2+i)^3 + (4-3i)^3}{(1+i)^2} .$$

5.2.  $(-3 + 4i)x^2 - 3(1 + 2i)x + 3 - i = 0$ .

5.3. Faktorizuokite polinomą  $x^7 + 1$  virš  $\mathbf{R}$ .

5.4.  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{|z+i|^2 + |z+i| + 39}{1 + 2|z+i|} > -2$ .