

4 Pratybos. Keitiniai. Rimantas Grigutis.

1. Keitinį $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 9 & 2 & 4 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ parašykite nesikertančiais ciklais. Kokia keitinio σ eilė?

Lyginis ar nelyginis šis keitiny? Raskite σ^{-1} .

2. Tegu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$,

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Pararašykite keitinius

$\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai?

3. Tegu $\alpha = (1, 3, 5, 7, 9), \beta = (1, 2, 6), \gamma = (1, 2, 5, 3) \in S_{10}$. Parašykite keitinį $\sigma = \alpha\beta\gamma$ nesikertančių ciklų sandauga. Raskite σ ir σ^{-1} eiles. Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai?

4. Tegu $\sigma = (2, 4, 9, 7)(6, 4, 2, 5, 9)(1, 6)(3, 7, 6) \in S_9$. Parašykite keitinį σ nesikertančių ciklų sandauga. Raskite σ ir σ^{-1} eiles. Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai?

5. Tegu $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 2 & 11 & 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, o $\sigma = (3, 8, 7) \in S_{11}$.

Pararašykite keitinius

$\sigma, \tau, \sigma \circ \tau, \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \tau \circ \sigma, \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ nesikertančiais ciklais. Kokios šių keitinių eilės? Lyginiai ar nelyginiai šie keitiniai?

6. Įrodykite, kad $ord_{S_n}(\sigma) = ord_{S_n}(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1})$.

7. Įrodykite, kad grupėje S_{10} yra 10, 12, 14 eilės keitiniai, bet nėra 11 ir 13 eilių keitinių.

8. Keitinio π dekrementą apibrėžia formule $d = d(\pi) = s - k$, kur s - keičiami keitinio π skaičiai, k - nepriklausomų ciklų skaičius.

1) Įrodykite, kad $\text{sign}\pi = (-1)^d$.

2) Įrodykite, kad keitinį π galima parašyti d transpozicijų sandauga.

3) Įrodykite, kad keitinį π negalima parašyti mažiau kaip d transpozicijų sandauga.

9. Įrodykite, kad $S_n = \langle (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n) \rangle$.

10. Įrodykite, kad $S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n) \rangle$.

11. Įrodykite, kad $S_n = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$.

12. Įrodykite, kad $A_n = \langle (i, j, k) \mid 1 \leq i, j, k \leq n \rangle$.

13. Įrodykite, kad $A_n = \langle (1, 2, 3), (1, 2, 4), \dots, (1, 2, n) \rangle$.

14. Kiek grupėje S_{100} ciklų, kurių ilgis 100 ?

15. Įrodykite, kad keitinio $\pi = (1, 2, \dots, n) \in S_n$ k -asis laipsnis π^k yra $d = \text{DBD}(n, k)$ ciklų, kurių ilgis $q = \frac{n}{d}$, sandauga.