14 paskaita. *Tiesinės transformacijos erdvėje.*

Apibrėžmas. Funkcija T iš $xyz-$ erdvės į $xyz-$ erdvę, $T(x,y,z)=(u,v,w)$, apibrėžta lygybėmis

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \qquad (1) \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

vadinama **tiesine transformacija.**

Tiesinę transformaciją T apibrėžiančias lygybes (1) galima reikšti ir matricomis

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

Taigi pati transformacija T gali būti apibrėžiama ir trumpiau

$$T(\mathbf{a}) = A\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

čia $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ $-$ vektoriai, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $-$ tiesinės transformacijos T matrica. Norėdami pabrėžti ryšį tarp transformacijos T ir jos matricos A, pačią transformaciją žymi T_A, o transformacijos T (arba T_A) matricą žymi $[T]$ (arba $[T_A]$):

$$T(\mathbf{a}) = [T]\,\mathbf{a}$$
$$[T_A] = A.$$

Pavyzdžiai. 1) Transformacija T_0, apibrėžta lygybe

$$T_0(\mathbf{a}) = 0\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

čia $0-$ nulinė matrica, vadinama **nuline transformacija**. Šią transformaciją dažnai žymi 0.

2) Transformacija T_I, apibrėžta lygybe

$$T_I(\mathbf{a}) = I\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

čia $I-$ vienetinė matrica, vadinama **vienetine transformacija**. Šią transformaciją dažnai žymi I.

Svarbi pastaba. Visiškai analogiškai galima apibrėžti ir tiesines transformacija ir $xy-$ plokštumoje: $T_A(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = [T_A]\,\mathbf{a}$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Aptarsime svarbiausias tiesines transformacijas $xy-$ plokštumoje ir $xyz-$ erdvėje.

1. *Atspindžio transformacija.*

Apibrėžimas. Atspindžio transformacija yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti vektorių simetrišką kurios nors tiesės arba plokštumos atžvilgiu.

1.1. *Atspindžio transformacija $xy-$ plokštumoje.*

$\underline{Transformacija}$	$\underline{Lygtys}$	$\underline{Matrica}$	$\underline{Formul\dot{e}}$
Atspindys y- ašies atžvilgiu	$u = -x$ $v = y$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Atspindys x- ašies atžvilgiu	$u = x$ $v = -y$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Atspindys $y = x$ atžvilgiu	$u = y$ $v = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1.1. *Atspindžio transformacija $xyz-$ erdvėje.*

$\underline{Transformacija}$	$\underline{Lygtys}$	$\underline{Matrica}$	$\underline{Formulė}$
Atspindys xy- plokštumos atžvilgiu	$u = x$ $v = y$ $w = -z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Atspindys xz- plokštumos atžvilgiu	$u = x$ $v = -y$ $w = z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Atspindys yz- plokštumos atžvilgiu	$u = -x$ $v = y$ $w = z$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija.*

Apibrėžimas. Ortogonaliosios projekcijos transformacija yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti to vektoriaus ortogonaliąją projekciją kurioje nors tiesėje arba plokštumoje, einančiose per koordinačių pradžią.

2.1. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija $xy-$ plokštumoje.*

$\underline{Transformacija}$	$\underline{Lygtys}$	$\underline{Matrica}$	$\underline{Formulė}$
Projekcija į x- ašį	$u = x$ $v = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Projekcija į y- ašį	$u = 0$ $v = y$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2.2. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija $xyz-$ erdvėje.*

$\underline{Transformacija}$	$\underline{Lygtys}$	$\underline{Matrica}$	$\underline{Formulė}$
Projekcija į xy- plokštumą	$u=x$, $v=y$, $w=0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Projekcija į xz- plokštumą	$u=x$, $v=0$, $w=z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Projekcija į yz- plokštumą	$u=0$, $v=y$, $w=z$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. *Posūkis.*

Apibrėžimas. Posūkiu kampu θ xy - pokštumoje vadiname tiesinę transformaciją T^{θ}, kuri kiekvieną vektorių xy - plokštumoje pasuka prieš laikrodžio rodyklę kampu θ.

Rasime posūkio transformacijos T^{θ} matricą.
Tegu $T^{\theta}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Turime

$$\begin{gathered} \mathbf{a} = (x, y) = r\cos\varphi\mathbf{i} + r\sin\varphi\mathbf{j}, \\ \mathbf{b} = (u, v) = r\cos(\theta+\varphi)\,\mathbf{i} + r\sin(\theta+\varphi)\,\mathbf{j} \end{gathered}$$

ir

$$\begin{gathered} x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi \\ u = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi = x\sin\theta + y\cos\theta \end{gathered}$$

Tada

$$\left[T^{\theta}\right]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas. Tegu $l-$ tiesė xyz - erdvėje, einanti per koordinačių pradžią, ir $\mathbf{u}$ vektorius tiesėje l ir pradžia taške $(0,0,0)$. **Teigiama tiesės posūkio kryptimi** vadinsime kryptį, gaunamą sukant dešinę ranką, nykščiu nukreiptą vektoriaus $\mathbf{u}$ kryptimi, sulenktų pirštų link (*dešinės rankos taisyklė*).

Posūkiu kampu θ xyz - erdvėje vadiname tiesinę transformaciją T^{θ}, kuri kiekvieną vektorių xyz - plokštumoje pasuka teigiama duotos tiesės posūkio kryptimi kampu θ.

Transformacija	*Lygtys*	*Matrica*
Posūkis apie x- ašį kampu θ	$u=x$ $v=y\cos\theta-z\sin\theta$ $w=y\sin\theta+z\cos\theta$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$
Posūkis apie y- ašį kampu θ	$u=x\cos\theta+z\sin\theta$ $v=1$ $w=-x\sin\theta+z\cos\theta$	$\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}$
Posūkis apie z- ašį kampu θ	$u=x\cos\theta-y\sin\theta$ $v=x\sin\theta+y\cos\theta$ $w=z$	$\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Posūkis kampu θ vektoriaus $\mathbf{u}=(a,b,c)$ kryptimi - tai transformacija, kurios matrica:

$$\begin{pmatrix}a^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & ab(1-\cos\theta)-c\sin\theta & ac(1-\cos\theta)+b\sin\theta\\ ab(1-\cos\theta)+c\sin\theta & b^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & bc(1-\cos\theta)-a\sin\theta\\ ac(1-\cos\theta)-b\sin\theta & bc(1-\cos\theta)+a\sin\theta & c^2(1-\cos\theta)+\cos\theta\end{pmatrix}.$$

4. *Tiesinis ištempimas ir tiesinis suspaudimas.*

Apibrėžimas. Tegu k - neneigiamas skaičius. Tada transformacija $T(\mathbf{a}) = k\mathbf{a}$ vadinama **ištempimu**, jei $k \geq 1$, ir **suspaudimu**, jei $0 \leq k \leq 1$.

Aišku, kad tiek ištempimo, tiek suspaudimo matricos xy - plokštumoje ir xyz - erdvėje yra

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

atitinkamai.

Tiesinių transformacijų kompozicija.

Apibrėžimas. Tegu T_A ir T_B - dvi transformacijos arba xy plokštumoje, arba xyz erdvėje. Tada transformaciją $T_B \circ T_A$ apibrėžtą formule

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{a}) = T_B(T_A(\mathbf{a}))$$

vadina tiesinių **transformacijų** T_A ir T_B **kompozicija**(**sandauga**).

Transformacija $T_B \circ T_A$ - tiesinė, nes

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{a}) = T_B(T_A(\mathbf{a})) = B(A\mathbf{a}) = (BA)\mathbf{a}.$$

Taigi turime, kad

$$T_B \circ T_A = T_{BA}.$$

Pavyzdys. $T^{\theta_2} \circ T^{\theta_1} = T^{\theta_2+\theta_1}$.
Tikrai

$$\begin{aligned}\left[T^{\theta_2} \circ T^{\theta_1}\right] = \left[T^{\theta_2}\right] \cdot \left[T^{\theta_1}\right] &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \\ &= \left[T^{\theta_2+\theta_1}\right].\end{aligned}$$

Pastaba. Tiesinių transformacijų kompozicijoje yra sverbi transformacijų atlikimo eilės tvarka. Bendrai transformacija $T_B \circ T_A$ ne visada yra lygi transformacijai $T_A \circ T_B$. Pavyzdžiui, tegu T_A atspindžio transformacija xy plokštumoje tiesės $y = x$ atžvilgiu, o T_B - ortogonalioji projekcija į x -ašį. Tada

$$[T_B \circ T_A] = [T_B]\,[T_A] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$[T_A \circ T_B] = [T_A]\,[T_B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ir $T_B \circ T_A \neq T_A \circ T_B$.