13 paskaita. *Tiesė erdvėje. Dviejų tiesių, tiesės ir plokštumos padėtis erdvėje.*

Tiesę erdvėje galima apibrėžti kaip dviejų sisikertančių plokštumų susikirtimo bendrų taškų aibę. Taigi, kiekvieną tiesę galima užrašyti dviejų tiesinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} . \qquad (1)$$

Tai **bendroji tiesės lygtis**.

Tegu $A_0(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow$ fiksuotas tiesės t taškas, o $A(x, y, z)$ - bet kuris tiesės t taškas, ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ - nenulinis vektorius lygiagretus tiesei t. Tada vektoriai $\mathbf{AA}_0 = (x \Leftrightarrow x_0, y \Leftrightarrow y_0, z \Leftrightarrow z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ yra kolinearūs. Todėl

$$\frac{x \Leftrightarrow x_0}{k} = \frac{y \Leftrightarrow y_0}{l} = \frac{z \Leftrightarrow z_0}{m}.$$

Šis tiesės pavidalas vadinamas **kanonine tiesės lygtimi**, o vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ vadinamas tiesės t **krypties vektoriumi**.

Vektorių $\mathbf{AA}_0 = (x \Leftrightarrow x_0, y \Leftrightarrow y_0, z \Leftrightarrow z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ kolinearumą galėtume užrašyti ir taip:

$$\mathbf{AA}_0 = t\mathbf{v}$$

arba

$$\begin{aligned} x \Leftrightarrow x_0 &= tk \\ y \Leftrightarrow y_0 &= tl \\ z \Leftrightarrow z_0 &= tm \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tk \\ y &= y_0 + tl \\ z &= z_0 + tm \end{aligned}$$

Tai **parametrinės tiesės t lygtys**.

Kaip iš bendrosios tiesės lygties rasti kanoninę tiesės lygtį?

Tegu (1) yra bendroji tiesės t lygtis. Tiesės t krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ tai bet kuris vektorius *lygiagretus* abiems plokštumoms: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, t.y. vektorius $\mathbf{v}$ yra statmenas abiems plokštumų normalės vektoriams $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Taigi vektoriumi $\mathbf{v}$ galėtų būti vektorius

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Norint rasti kurį nors vieną tiesės tašką A_0, reiktų paimti kurį nors sistemos (1) sprendinį (x_0, y_0, z_0).

Tiesių padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu.

Tegu $\mathbf{v} = (k, l, m)$ - tiesės t krypties vektorius.
1. $k = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus yz plokštumai
2. $l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus xz plokštumai
3. $m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus xy plokštumai
4. $k = l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{k} \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus Oz ašiai
5. $l = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus Ox ašiai
6. $k = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{j} \Leftrightarrow \mathbf{v}$ lygiagretus Oy ašiai.

Teorema(dviejų tiesių padėtis erdvėje). Tegu duotos dvi tiesės:

$$t_1 : \frac{x \Leftrightarrow x_1}{k_1} = \frac{y \Leftrightarrow y_1}{l_1} = \frac{z \Leftrightarrow z_1}{m_1}$$
$$t_2 : \frac{x \Leftrightarrow x_2}{k_2} = \frac{y \Leftrightarrow y_2}{l_2} = \frac{z \Leftrightarrow z_2}{m_2}.$$

Tada
1) tiesės t_1 ir t_2 lygiagrečios $\Longleftrightarrow \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$.
2) tiesės t_1 ir t_2 statmenos $\Longleftrightarrow k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.
3) kampas φ tarp tiesių t_1 ir t_2 randamas iš lygties

$$\cos\varphi = \frac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1 + l_1 + m_1}\sqrt{k_2 + l_2 + m_2}} .$$

4) tiesės t_1 ir t_2 yra prasilenkiančios $\quad \Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 \Leftrightarrow x_1 & y_2 \Leftrightarrow y_1 & z_2 \Leftrightarrow z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

5) tiesės t_1 ir t_2 priklauso vienai plokštumai $\quad \Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 \Leftrightarrow x_1 & y_2 \Leftrightarrow y_1 & z_2 \Leftrightarrow z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Įrodymas.1)

$$\begin{gathered} \text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ lygiagrečios} \\ \Longleftrightarrow \text{krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ lygiagretūs} \\ \Longleftrightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \end{gathered}$$

2)

$$\begin{gathered} \text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ statmenos} \\ \Longleftrightarrow \text{krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ statmeni} \\ \Longleftrightarrow k_1 k_2 + l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0. \end{gathered}$$

3) kampas φ tarp tiesių t_1 ir t_2 tai kampas tarp krypties vektorių $\mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)$ ir $\mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2)$, todėl

$$\cos\varphi = \frac{k_1 k_2 + l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{k_1 + l_1 + m_1}\sqrt{k_2 + l_2 + m_2}}.$$

4)

$$\begin{gathered} \text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ yra prasilenkiančios} \\ \Longleftrightarrow \text{vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir} \\ \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = (x_2 \Leftrightarrow x_1, y_2 \Leftrightarrow y_1, z_2 \Leftrightarrow z_1) \textit{ nėra komplanarūs} \\ \Longleftrightarrow \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \neq 0. \end{gathered}$$

5)

$$\begin{gathered}\text{tiesės } t_1 \text{ ir } t_2 \text{ priklauso vienai plokštumai}\\ \Longleftrightarrow \text{vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir}\\ \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = (x_2 \Leftrightarrow x_1, y_2 \Leftrightarrow y_1, z_2 \Leftrightarrow z_1)\ \textit{komplanarūs}\\ \Longleftrightarrow \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = 0.\end{gathered}$$

Įrodyta.

Teorema(tiesės ir plokštumos padėtis erdvėje). Tegu duota tiesė t :

$$\frac{x \Leftrightarrow x_0}{k} = \frac{y \Leftrightarrow y_0}{l} = \frac{z \Leftrightarrow z_0}{m}$$

ir plokštuma P :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

1) tiesė t lygiagreti plokštumai P $\quad\Longleftrightarrow ak + bl + cm = 0$

2) tiesė t statmena plokštumai P $\quad\Longleftrightarrow \dfrac{a}{k} = \dfrac{b}{l} = \dfrac{c}{m}.$

Įrodymas. Tiesė t lygiagreti plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės t krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ *statmenas* plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n} = (a, b, c)$:

$$ak + bl + cm = 0$$

Tiesė t statmena plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės t krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ *lygiagretus* plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n} = (a, b, c)$:

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m}.$$

Įrodyta.

Dabar aptarsime atstumo problemą tiesei erdvėje.

Tegu $A(a_1, a_2, a_3)$ ir $B(b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow$ fiksuoti tiesės t taškai, $P(x, y, z) \Leftrightarrow$ bet kuris tiesės t taškas, ir $\mathbf{AB} = (b_1 \Leftrightarrow a_1, b_2 \Leftrightarrow a_2, b_3 \Leftrightarrow a_3)$ - nenulinis vektorius lygiagretus tiesei t. Tada vektoriai $\mathbf{AP} = \mathbf{OP} \Leftrightarrow \mathbf{OA}$ ir $\mathbf{AB}$ yra kolinearūs:

$$\mathbf{OP} \Leftrightarrow \mathbf{OA} = t\mathbf{AB}.$$

Tada lygybė

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + t\mathbf{AB} \qquad (\Leftrightarrow\infty < t < +\infty)$$

vadinama **vektorine tiesės t lygtimi**.

Teorema(taško atstumas iki tiesės) Tegu C yra erdvės taškas ir $t\Leftrightarrow$tiesė, einanti per du taškus A ir B. Tada egzistuoja lygiai vienas toks tiesės t taškas P, kad vektorius $\mathbf{CP}$ yra statmenas vektoriui $\mathbf{AB}$ ir

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + t\mathbf{AB}, \qquad t = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB}\|^2},$$

ir taško C atstumas iki tiesės t lygus

$$CP = \frac{\sqrt{AC^2 \cdot AB^2 \Leftrightarrow (\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB})^2}}{AB}.$$

Įrodymas. Tegu $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + t\mathbf{AB}$ ir vektorius $\mathbf{CP}$ yra statmenas vektoriui $\mathbf{AB}$. Tada

$$\begin{aligned}
\mathbf{CP} \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\
(\mathbf{OP} \Leftrightarrow \mathbf{OA}) \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\
(\mathbf{OA} + t\mathbf{AB} \Leftrightarrow \mathbf{OA}) \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\
(\mathbf{CA} + t\mathbf{AB}) \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\
\mathbf{CA} \cdot \mathbf{AB} + t\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB} &= 0 \\
\Leftrightarrow \mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB} + t\,\|\mathbf{AB}\|^2 &= 0 \\
t &= \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB}\|^2}.
\end{aligned}$$

Vektoriai $\mathbf{CP}$ ir $\mathbf{PA}$ yra statmeni, todėl iš Pitagoro teoremos trikampiui PAC (kampas prie viršūnės $P\Leftrightarrow$status) turime:

$$\begin{aligned}
CP^2 &= AC^2 \Leftrightarrow PA^2 \\
&= AC^2 \Leftrightarrow \|t\mathbf{AB}\|^2 \\
&= AC^2 \Leftrightarrow t^2 AB^2 \\
&= AC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{\|\mathbf{AB}\|^2}\right)^2 AB^2 \\
&= \frac{AC^2 \cdot AB^2 \Leftrightarrow (\mathbf{AC} \cdot \mathbf{AB})^2}{AB^2}.
\end{aligned}$$

O tai ir reikėjo įrodyti.

Įrodyta.