

12 paskaita. *Plokštuma erdvėje.*

Teorema. Tegū a, b, c, d tokie skaičiai, kad $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Tada lygibė

$$ax + by + cz + d = 0$$

yra kai kurios plokštumos taškų lygtis. Kitą vertus, bet kurios plokštumos P lygtis turi tokį pavidalą.

Įrodymas. (\Leftarrow). Tegū $A_0(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow$ plokštumos P taškas, o $\mathbf{n} = (a, b, c)$ - vektorius, statmenas šiai plokštumai. Jei $A(x, y, z) \Leftrightarrow$ bet kuris plokštumos P taškas, tai vektoriai $\mathbf{A}_0\mathbf{A} = (x \Leftrightarrow x_0, y \Leftrightarrow y_0, z \Leftrightarrow z_0)$ ir \mathbf{n} yra statmeni, todėl

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A} = 0$$

arba

$$a(x \Leftrightarrow x_0) + b(y \Leftrightarrow y_0) + c(z \Leftrightarrow z_0) = 0.$$

Taigi, plokštumos P lygtis yra

$$ax + by + cz + d = 0,$$

čia $d = \Leftrightarrow ax_0 \Leftrightarrow by_0 \Leftrightarrow cz_0$.

(\Rightarrow). Tegū x_0, y_0, z_0 - yra lygties $ax + by + cz + d = 0$ sprendinys:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Tada teisinga

$$a(x \Leftrightarrow x_0) + b(y \Leftrightarrow y_0) + c(z \Leftrightarrow z_0) = 0.$$

Tegū apibrėžti vektorius $\mathbf{n} = (a, b, c)$, taškai $A_0(x_0, y_0, z_0)$ ir $A(x, y, z)$. Tada paskutiniąją lygibę galima užrašyti vektarine forma:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_0\mathbf{A} = 0.$$

Turime, kad visi plokštumos, einančios per tašką $A_0(x_0, y_0, z_0)$ ir statmenos vektoriumi \mathbf{n} , taškai ir tik jie tenkina paskutiniąją lygtį. Todėl tai ir yra šios plokštumos lygtis, kurią vadina **bendrają lygtimi**.

Irodyta.

Aptarkime plokštumos $P : ax + by + cz + d = 0$ padėtį koordinatinių ašių atžvilgiu.

Galimi šie atvejai.

1) $a = b = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (0, 0, c)$ lygiagretus Oz ašiai. Plokštuma P lygiagreti xy plokštumai.

2) $b = c = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (a, 0, 0)$ lygiagretus Ox ašiai. Plokštuma P lygiagreti yz plokštumai.

3) $a = c = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (0, b, 0)$ lygiagretus Oy ašiai. Plokštuma P lygiagreti xz plokštumai.

4) $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (0, b, c)$ statmenas Ox ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Ox ašiai.

5) $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (a, 0, c)$ statmenas Oy ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oy ašiai.

6) $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$. Vektorius $\mathbf{n} = (a, b, 0)$ statmenas Oz ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oz ašiai.

7) $d = 0$. Plokštuma eina per tašką $(0, 0, 0)$.

Padaliję plokštumos P lygtį $ax + by + cz + d = 0$ iš d ir pažymėję

$$\alpha = \frac{d}{a}, \beta = \frac{d}{b}, \gamma = \frac{d}{c}$$

turėsime plokštumos lygtį

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1,$$

kurią vadina **ašine plokštumos lygtimi**. Skaičiai α, β, γ koordinatinių pradžios taško $(0, 0, 0)$ atstumai iki koordinatinių ašių taškų, kuriuos iškerta plokštuma P : Ox ašyje taškas $(\alpha, 0, 0)$, Oy ašyje taškas $(0, \beta, 0)$, Oz ašyje taškas $(0, 0, \gamma)$.

Rasime taško atstumą iki duotos plokštumos.

Teorema. Taško $A_0(x_0, y_0, z_0)$ atstumas D iki plokštumos $P : ax + by + cz + d = 0$, yra lygus

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Įrodymas. Tegū $B(x_1, y_1, z_1)$ bet kuris plokštumos P taškas, o plokštumos normalės vektoriaus $\mathbf{n} = (a, b, c)$ pradžia yra taške B . Tada atstumas D yra lygus vektoriaus \mathbf{BA}_0 projekcijos į vektorių \mathbf{n} ilgiui:

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{BA}_0\| = \frac{|\mathbf{BA}_0 \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Turime

$$\begin{aligned} \mathbf{BA}_0 &= (x_0 \Leftrightarrow x_1, y_0 \Leftrightarrow y_1, z_0 \Leftrightarrow z_1) \\ \mathbf{BA}_0 \cdot \mathbf{n} &= a(x_0 \Leftrightarrow x_1) + b(y_0 \Leftrightarrow y_1) + c(z_0 \Leftrightarrow z_1) \\ \mathbf{n} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Tada

$$D = \frac{|a(x_0 \Leftrightarrow x_1) + b(y_0 \Leftrightarrow y_1) + c(z_0 \Leftrightarrow z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Taškas B yra plokštumos P taškas, todėl jo koordinatės tenkina plokštumos P lygtį:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ir

$$d = \Leftrightarrow ax_1 \Leftrightarrow by_1 \Leftrightarrow cz_1.$$

Iš čia gauname reikiamą D išraišką.

Įrodyta.

Aptarsime dviejų ir trijų plokštumų padėtį erdvėje.

Teorema (dviejų plokštumų padėtis erdvėje). Tegu plokštumų P_1 ir P_2 lygtys yra:

$$\begin{aligned}P_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\P_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.\end{aligned}$$

1) Plokštumos P_1 ir P_2 lygiagrečios tada ir tik tada, kai

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

2) Plokštumos P_1 ir P_2 statmenos tada ir tik tada, kai

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

3) Kampas tarp plokštumų φ kosinusas yra lygus:

$$\cos \varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1 ir P_2 atitinkamai. Tada

1) $P_1 \parallel P_2 \iff \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$

2) $P_1 \perp P_2 \iff \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \iff \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \iff a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$

3) Kampas φ yra kampas tarp normalės vektorių \mathbf{n}_1 ir \mathbf{n}_2 . Todėl

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodyta.

Teorema (trijų plokštumų padėtis erdvėje). Tegu plokštumų P_1, P_2 ir P_3 lygtys yra:

$$\begin{aligned} P_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ P_3 &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{aligned}$$

$$1) \text{ Plokštumos } P_1, P_2 \text{ ir } P_3 \text{ kertasi viename taške} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$2) \text{ Plokštumos } P_1, P_2 \text{ ir } P_3 \text{ yra lygiagrečios vienai tiesei} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ir $\mathbf{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1, P_2 ir P_3 atitinkamai. Tada

1) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 kertasi viename taške \iff vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir \mathbf{n}_3 nėra lygiagretūs vienai plokštumai (jei būtų lygiagretūs vienai plokštumai, tai kirstamiesi taške, kirstųsi ir tiese) \iff vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir \mathbf{n}_3 yra nekomplanarūs \iff

$$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) \neq 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios vienai tiesei \iff vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir \mathbf{n}_3 lygiagretūs vienai plokštumai \iff vektoriai $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ ir \mathbf{n}_3 yra komplanarūs \iff

$$\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = 0 \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Įrodyta.

Galima viena iš aštuonių trijų plokštumų P_1, P_2 ir P_3 padėčių erdvėje. Jas aprašysime tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

sprendiniais.

Pažymėkime sistemos matricą A , o sistemos išplėstinę matricą B . Tada:

$$\text{rank}A = 1, \text{rank}B = 2$$

1) sistema nesuderinta \Rightarrow Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} &= \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \\ \frac{a_1}{a_3} &= \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3} \\ \frac{a_2}{a_3} &= \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3} \neq \frac{d_2}{d_3} \end{aligned}$$

2) sistema nesuderinta \Rightarrow dvi plokštumos sutampa ir lygiagrečios trečiajai $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} &= \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \\ \frac{a_1}{a_3} &= \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3} \end{aligned}$$

$$\text{rank}A = 2, \text{rank}B = 3$$

3) sistema nesuderinta \Rightarrow dvi plokštumos lygiagrečios viena kitai ir nelygiagrečios trečiai $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, \mathbf{n}_3 nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

4) sistema nesuderinta \Rightarrow dvi plokštumos kertasi teise, lygiagrečia trečiajai plokštumai $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs

$$\text{rank}A = 3$$

5) sistema suderinta \Rightarrow plokštumos kertasi viename taške $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - nekomplanarūs

$$\text{rank}A = \text{rank}B = 1$$

6) sistema suderinta \Rightarrow visos plokštumos sutampa $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2} &= \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \\ \frac{a_1}{a_3} &= \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{d_1}{d_3} \end{aligned}$$

$$\text{rank}A = \text{rank}B = 2$$

7) sistema suderinta \Rightarrow dvi plokštumos sutampa ir nelygiagrečios trečiajai $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, \mathbf{n}_3 nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

8) sistema suderinta \Rightarrow dvi plokštumos kertasi teise, esančia trečioje plokštumoje $\Leftrightarrow \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs.