Algebra ir geonetrija informatikams.Paskaitų konspektas. Rimantas Grigutis
8 paskaita. *Kompleksiniai skaičiai.*

Įvadas. Kompleksinių skaičių aibę $\mathbf{C}$ galima apibrėžti 2×2 matricomis.

Apibrėžimas. Kompleksiniu skaičiumi vadiname matricą

$$\begin{pmatrix} a & \Leftrightarrow b \\ b & a \end{pmatrix},$$

čia a ir b⇔realieji skaičiai.

Kompleksinį skaičių $[a] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ vadinsime realiu kompleksiniu skaičiumi. Aukščiau matėme, kad tokias matricas galima sutapatinti su pačiu realiu skaičiumi a. Pagrįsime šį sutapatinimą.

Realius kompleksinius skaičius $[a]$ ir $[b]$ vadinsime atitinkamai realiąja ir menamąja kompleksinio skaičiaus $\begin{pmatrix} a & \Leftrightarrow b \\ b & a \end{pmatrix}$ dalimi. Kompleksinį skaičių $\begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ žymėsime raide i.

Tada

$$\begin{pmatrix} a & \Leftrightarrow b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} =$$
$$[a] + i\,[b]$$

ir

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Leftrightarrow 1 & 0 \\ 0 & \Leftrightarrow 1 \end{pmatrix} = [\Leftrightarrow 1].$$

Du kompleksiniai skaičiai yra lygūs tada ir tik tada, kai lygios jų realios ir menamos dalys:

$$\begin{pmatrix} a_1 & \Leftrightarrow b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = [a_1] + i\,[b_1] = [a_2] + i\,[b_2] = \begin{pmatrix} a_2 & \Leftrightarrow b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ ir } b_1 = b_2.$$

Iš čia tiesiogiai turime, kad kompleksinis skaičius lygus nuliui tada ir tik tada, kaijo realioji ir menamoji dalys lygios nuliui:

$$[a] + i\,[b] = [0] \Leftrightarrow a = 0 \text{ ir } b = 0.$$

Realių kompleksinių skaičių aritmetika tokia pat kaip ir pačių realių skaičių:

$$[a]+[b]=[a+b] \text{ ir } [a]\,[b]=[ab]\,.$$

Realių kompleksinių skaičių aibė sudaro kūną. Skaitytojui paliekame savarankiškai įsitikinti, kad šiems skaičiams teisingos visos kūno aksiomos:

K1. $([a]+[b])+[c]=[a]+([b]+[c])\,.$

K2. $[a]+[b]=[b]+[a]\,.$

K3. $[a]+[0]=[a]\,.$

K4. $[a]+[\Leftrightarrow a]=[0]\,.$

K5. $([a]\,[b])\,[c]=[a]\,([b]\,[c])\,.$

K6. $[a]\,[b]=[b]\,[a]\,.$

K7. $[a]\,[1]=[a]\,.$

K8. Su visais $a\neq 0$ teisinga $[a]\,[a^{-1}]=[1]\,.$

K9. $[a]\,([b]+[c])=[a]\,[b]+[a]\,[c]\,.$

K10. $[0]\neq[1]\,.$

Pastebėsime, kad

$$\begin{gathered}[a]\Leftrightarrow[b]=[a]+(\Leftrightarrow[b])=[a]+[\Leftrightarrow b]=[a\Leftrightarrow b] \text{ ir}\\ \tfrac{[a]}{[b]}=[a]\,[b]^{-1}=[a]\,[b^{-1}]=[ab^{-1}]=\left[\tfrac{a}{b}\right].\end{gathered}$$

Taigi realius kompleksinius skaičius $[a]$ galime sutapatinti su pačiais realiais skaičiais a ir kopleksinį skaičių $[a]+i\,[b]$ žymėti tiesiog $a+ib$.

Žvilgtelkim įdėmiau į pačių kompleksinių skaičių aritmetiką.

Dviejų kompleksinių skaičių suma irgi yra kompleksinis skaičius:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i\,(b_1+b_2)\,.$$

Dviejų kompleksinių skaičių sandauga irgi yra kompleksinis skaičius:

$$\begin{gathered}(a_1+ib_1)\,(a_2+ib_2)\\ =a_1\,(a_2+ib_2)+(ib_1)\,(a_2+ib_2)=a_1a_2+a_1\,(ib_2)+(ib_1)\,a_2+(ib_1)\,(ib_2)\\ =a_1a_2+ia_1b_2+ib_1a_2+i^2b_1b_2=(a_1a_2+(\Leftrightarrow 1)\,b_1b_2)+i\,(a_1b_2+b_1a_2)\\ =(a_1a_2\Leftrightarrow b_1b_2)+i\,(a_1b_2+b_1a_2)\,.\end{gathered}$$

Skaitytojui paliekame savarankiškai įsitikinti, kad kompleksinių skaicų aibė $\mathbf{C}$ sudėties ir sandaugos atžvilgiu sudaro kūną. Pastebesime tik, kad kompleksinio skaičiaus $a+ib$ priešingas skaičius yra $(\Leftrightarrow a)+i\,(\Leftrightarrow b)$, o jei $a+ib\neq 0$, t.y. $a^2+b^2\neq 0$, tai atvirkštinis kompleksinis skaičius yra $(a+ib)^{-1}=c+id=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$.

Geometrinis kompleksinių skaičių apibrėžimas. Kompleksiniu skaičiumi z vadiname vadiname realiųjų skaičių porą (a, b), kurią reikšiame lygybe $z = a+ib$; skaičius a vadinamas *realiąja* z dalimi ir žymimas $a = \mathrm{Re}(z)$; skaičius b vadinamas *menamąja* z dalimi ir žymimas $b = \mathrm{Im}(z)$. Kompleksinių skaičių aibė žymima $\mathbf{C}$.

Kompleksinių skaičių aibėje yra apibrėžtas sudėties ir sandaugos veiksmas formulėmis:

$$\begin{gathered}(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i\,(b+d)\,;\\ (a+ib)\cdot(c+id)=(ac\Leftrightarrow bd)+i\,(ad+bc)\,.\end{gathered}$$

Kaip matėme aukščiau, kompleksinių skaičių aibė sudėties ir sandaudos atžvilgiu sudaro kūną. Tuo galima įsitikinti ir tiesiogiai tikrinan kūną apibrėžiančias savybes.

Iš apibrėžimo matome, kad kiekvienam kompleksiniam skaičiui $z = a + ib$ galima vienareikšmiškai priskirti plokštumos, kurioje yra Dekarto koordinačių sistema, tašką (a, b). Kompleksinių skaičių aibės reiškimas vadinamas Gauso skaičių plokštuma(Gauss'sche Zahlenebene) arba kompleksinių skaičių plokštuma. Šis reiškimas pasiteisina jau ir tuo, kad pagrindiniai kompleksinių skaičių veiksmai paprastai interpretuojami geometriškai: dviejų kompleksinių skaičių $a+ib$ ir $c+id$ sudėtis interpretuojama kaip dvimačių vektorių (a, b) ir (c, d) suma $(a, b)+(c, d) = (a + c, b + d)$ (prisiminkime lygiagretainio taisyklę).

Sandaugos veiksmo interpretacijai naudojamas **trigonometrinis** kompleksinio skaičiaus $z = a + ib$ reiškimas, įvedant plokštumoje taško (a, b) **polines koordinates** $[r, \varphi]$: čia $r\Leftrightarrow$taško $A = (a, b)$ atstumas iki taško $O = (0, 0)$, kuris vadinamas poliumi, o $\varphi\Leftrightarrow$kampas tarp teigiamos $x\Leftrightarrow$ašies ir spindulio OA. Pastebėsime, kad su kiekvienu $r > 0$ kampas φ yra apibrėžiamas $360°$ (arba 2π) kampo kartotinio tikslumu; beto kai $r = 0$, kampas φ neapibrėžiamas. taigi, kiekvieną kompleksinį skaičių $z = a + ib$ galime reikšti:

$$z=[r,\varphi]\,,\qquad r\geq 0,\qquad 0°\leq\varphi<360°\ (\ 0\leq\varphi<2\pi).$$

Ryšis tarp dviejų kompleksinio skaičiaus z reiškimų $z = a + ib = (a, b)$ ir $z = [r, \varphi]$ pasireiškia formulėmis:

$$\begin{cases} a = r\cdot\cos\varphi \\ b = r\cdot\sin\varphi \end{cases};$$

ir

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ r \neq 0 \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} .$$

Kompleksinio skaičiaus z koordinatės polinėje koordinačių sistemoje $[r, \varphi]$ yra vadinamos ir reiškiamos:

$r = |z| \Leftrightarrow$ skaičiaus z **modulis**, $\varphi = \arg z \Leftrightarrow$ skaičiaus z **argumentas**.

Jeigu kompleksinio skaičiaus argumentą neapribosime intervalu $[0, 2\pi)$, tai du kompleksiniai skaičiai $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ ir $z_2 = [r_2, \varphi_2]$ yra lygūs tada ir tik tada, kada

arba $r_1 = r_2 = 0$ ir $\varphi_1, \varphi_2 \Leftrightarrow$ bet kokie kampai,

arba $r_1 = r_2$ ir $\varphi_1 = \varphi_2 + k \cdot 2\pi$ su visais $k \in \mathbf{Z}$.

Grįžkime prie geometrinės sandaugos veiksmo interpretacijos. Tegu

$$z_1 = [r_1, \varphi_1] = r_1 \cos\varphi_1 + i r_1 \sin\varphi_1$$

ir

$$z_2 = [r_2, \varphi_2] = r_2 \cos\varphi_2 + i r_2 \sin\varphi_2.$$

Tada

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left((\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \Leftrightarrow \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2) \right) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

ir todėl

$z_1 z_2 = [r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2]$, t.y.

$$\begin{cases} |z_1 z_2| & = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) & = \arg z_1 + \arg z_2 \end{cases} .$$

Skaičiaus z_1 sandauga su skaičiumi z_2 geometriškai galime interpretuoti kaip skaičiaus z_1 posūkį kampu φ_2 ir "ištempimą" r_2 kartus. Toks kompleksinių skaičių sandaugos interpretavimas nesunkiai leidžia paaiškinti skaičiaus $z \neq 0$ atvirkštinio skaičiaus $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ geometrinę prasmę.

Apibrėžimas. Tegu $z = a + ib \in \mathbf{C}$. Skaičius $\bar{z} = a \Leftrightarrow ib \in \mathbf{C}$ vadinamas skaičiaus z **jungtiniu skaičiumi**.

Yra teisingos šios lygybės:
$\dfrac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)\,, \quad \dfrac{z \Leftrightarrow \bar{z}}{2i} = \mathrm{Im}(z)\,, \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2.$
Išraiška $N(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$ vadinama skaičiaus z **norma**.
Tegu dabar

$$z = [r, \varphi]\,, \text{ o } \quad z^{-1} = [q, \psi]\,.$$

Tada

$$z \cdot z^{-1} = [r, \varphi] \cdot [q, \psi] = [r \cdot q, \varphi + \psi] = 1 = [1, 0]\,,$$

t.y.

$$r \cdot q = 1, \qquad \varphi + \psi = 0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

ir

$$q = r^{-1}, \qquad \psi = \Leftrightarrow \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \text{ ir pvz. } \psi = \Leftrightarrow \varphi.$$

Atsižvelgę į tai, kad $\cos(\Leftrightarrow\varphi) = \cos\varphi$, o $\sin(\Leftrightarrow\varphi) = \Leftrightarrow \sin\varphi$, turime, kad
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z^{-1} = r^{-1}(\cos\varphi \Leftrightarrow i\sin\varphi) \\ \bar{z} = r(\cos\varphi \Leftrightarrow i\sin\varphi) \end{array} \right\} \Rightarrow z \cdot \bar{z} = r^2$
$\Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{r^2}$.

Tegu dabar $z_1 = [r_1, \varphi_1]$ ir $z_2 = [r_2, \varphi_2]$, $z_2 \neq 0$(t.y. $r_2 \neq 0$).
Tada

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2\right].$$

Dabar induktyviai apibrėšime kompleksinio skaičiaus z laipsnį z^n, $n \in \mathbf{N}$:

$$z^0 = 1, \qquad z^{n+1} = z^n \cdot z \qquad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Tada

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^n = [r^n, n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Žinodami, kad $z^{-1} = [r^{-1}, \Leftrightarrow\varphi]$ ir $z^{-n} = (z^{-1})^n$, tai

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^{-n} = [r^{-n}, \Leftrightarrow n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{N}.$$

Taigi

$$z = [r, \varphi] \Rightarrow r^n = [r^n, n \cdot \varphi] \quad \text{su visais } n \in \mathbf{Z},$$

t.y.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ su visiais } n \in \mathbf{Z}.$$

Ši išraiška vadinama **Muavro** (*Abraham de Moivre*,1667-1754) **formule**.
Apibrėšime dabar šaknies traukimo veiksmą iš kompleksinio skaičiaus.

Apibrėžimas. n⇔ojo laipsnio šaknimi iš kompleksinio skaičiaus z vadiname tokius kompleksinius skaičius w, kuriems teisinga lygybė $w^n = z$.

Parodysime, kad egzistuoja lygiai $n, n \geq 2$, n - ojo laipsnio šaknų iš kompleksinio skaičiaus z.

Tegu

$$z = [r, \varphi] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ o } w = [q, \psi] = q(\cos\psi + i\sin\psi) \text{ ir } w^n = z.$$

Tada

$$[q^n, n \cdot \psi] = [r, \varphi].$$

Jeigu $z = 0$, tai ir $r = 0$, todėl $q^n = 0 \Rightarrow q = 0$, t.y. $w = 0$.
Jeigu $z \neq 0$, tai ir $r \neq 0$, todėl

$$\begin{array}{lll} q^n = r, & n \cdot \psi = \varphi + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z} \\ \Rightarrow q = \sqrt[n]{r}, & \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}, & k \in \mathbf{Z}.. \end{array}$$

Jeigu $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, tai iš lygybės

$$\frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} = \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} + 2\pi \cdot l, \qquad l \in \mathbf{Z}$$

turime, kad

$$k_1 \Leftrightarrow k_2 = l \cdot n \qquad \text{su kažkuriuo } l \in \mathbf{Z}.$$
$$k_1 \equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, n)\,.$$

Gavome: jeigu $z \neq 0$ ir $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbf{C}$, tai n⇔ojo laipsnio šaknimis yra kompleksiniai skaičiai

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad k \in \mathbf{Z},$$

ir du tokie skaičiai w_{k_1} ir w_{k_2} yra lygūs tada ir tik tada, kada $k_1 \equiv k_2\,(\mathrm{mod}\, n)\,.$ Visos skirtingos n⇔ojo laipsnio šaknys iš kompleksinio skaičiaus z yra $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$.

Teiginys. Tegu $z = a + ib,\ z_1,\ z_2 \in \mathbf{C}$. Tada yra teisingos šios savybės.
1) $\overline{(\bar{z})} = z$,

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \text{ atskiru atveju } \overline{\Leftrightarrow z} = \Leftrightarrow \bar{z}.$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \text{ atskiru atveju } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

2) Jeigu $N\,(z) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$, tai

$$N\,(z_1 \cdot z_2) = N\,(z_1) \cdot N\,(z_2) \text{ ir } N\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{N\,(z_1)}{N\,(z_2)} \text{ su visiais } z_2 \neq 0.$$

3) Jeigu $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$, tai

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|\,,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad \text{su visiais } z_2 \neq 0.$$

4) (*Trikampio nelygybė*).

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

Įrodymas. Įrodysime trikampio nelygybę:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 =$$
$$|z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1 \cdot \bar{z}_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2 =$$
$$(|z_1| + |z_2|)^2 .$$

Ištraukę aritmetinę kvadratinę šaknį, turėsime

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$

Įrodyta.

Išvados. Iš trikampio nelygybės turime

$$|z_1 \Leftrightarrow z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$\left.\begin{array}{l} |z_1 + z_2| \geq |z_1| \Leftrightarrow |z_2| \\ |z_1 + z_2| \geq |z_2| \Leftrightarrow |z_1| \end{array}\right\} \Rightarrow |z_1 + z_2| \geq ||z_1| \Leftrightarrow |z_2||$$

taigi su visais $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ yra teisinga

$$||z_1| \Leftrightarrow |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2| .$$