Algebra ir geometrija informatikams. Paskaitų konspektas. Rimantas Grigutis

7 paskaita. *Matricos.*

Matrica yra stačiakampė lentelė su joje įrašytais skaičiais. Matricų, kuriose yra m eilučių ir n stulpelių, sakysime $m \times n$ matricos, aibę žymėsime $M_{m\times n}(F)$, čia $F\Leftrightarrow$ arba $\mathbf{Q}$, arba $\mathbf{R}$. Pačias matricas žymėsime didžiosiomis lotyniškomis raidėmis, o lygybė $A = (a_{ij})$ reikš, kad matricos elementai yra skaičiai a_{ij}. Pats skaičius a_{ij} yra $i\Leftrightarrow$oje eilutėje ir $j\Leftrightarrow$ame stulpelyje. Dažnai skaičių a_{ij} žymi ir taip : $a_{ij} = (A)_{ij}$.

Sakysime, kad matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ yra lygios, jei jos yra to pačio dydžio, ir $a_{ij} = b_{ij}$ su visais i ir j.

Matricų aibėje $M_{m\times n}(F)$ yra apibrėžiami šie veiksmai:

Matricų sudėtis: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
Matricos daugyba iš skaičiaus: $\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.

Apibrėžimai. 1) Matricos A **priešinga matrica** vadinsime matricą $(\Leftrightarrow 1)\cdot A = \Leftrightarrow A$.
2) Matricą $O = (o_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$, $o_{ij} = 0$ su visais i ir j, vadinsime **nuline matrica**.

Matricų aibėje $M_{m\times n}(F)$, kurioje apibrėžti sudėties ir daugybos iš skaičiaus veiksmai, yra teisingos šios savybės(čia $\lambda, \mu\Leftrightarrow$ skaičiai, A, B ir $C\Leftrightarrow$ matricos iš $M_{m\times n}(F)$):
V1.(sudėties asociatyvumas) $(A + B) + C = A + (A + C)$.
V2.(sudėties komutatyvumas) $A + B = B + A$.
V3.(nulinės matricos egzistavimas) $O + A = A$.
V4.(priešingos matricos egzistavimas) $A + (\Leftrightarrow A) = O$.
V5. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$.
V6. $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$.
V7. $(\lambda\mu) A = \lambda (\mu A)$.
V8. $1 \cdot A = A$.

Apibrėžimas. Matematinių objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba iš skaičiaus, priklausančio F, ir šie veiksmai tenkina savybes V1⇔V8 vadinama **vektorine erdve virš** F.

Turime, kad matricų aibė $M_{m\times n}(F)$ yra vektorinė erdvė virš F. Tuo atveju, kai $m=1$, sakome, kad turime eilučių vektorinę erdvę $M_{1\times n}(F)=F^n$ (vadiname **aritmetine eilučių vektorine erdve**), o kai $n=1$, sakome, kad turime stulpelių vektorinę erdvę $M_{m\times 1}(F)=F_m$ (vadiname aritmetine stulpelių vektorine erdve).

Tegu $A_1,...,A_s\in M_{m\times n}(F)$, o $\alpha_1,...,\alpha_s\in F$. Matricą $\alpha_1A_1+\cdots+\alpha_sA_s$ vadina matricų $A_1,...,A_s$ tiesine kombinacija. Parodysime, kaip tiesinių lygčių sistemą reikšti stulpelių tiesine kombinacija.

Tegu turime tiesinių lygčių sistemą$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right.$:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right. . \qquad (1)$$

Apibrėžkime stulpelius:

$$A_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., A_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ir } B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tada sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n=B.$$

Taigi, norint išspręsti tiesinių lygčių sistemą (1) reikia mokėti stulpelį B reikšti stulpelių $A_1,A_2,...,A_n$ tiesine kombinacija.

Apibrėžimas. Matricų A ir B sandauga $A \cdot B = AB$ apibrėžiama tik tada kai matricos A stulpelių skaičius sutampa su matricos B eilučių skaičiumi. Jeigu $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ ir $B = (b_{ij}) \in M_{n \times l}$, tai matrica $AB \in M_{m \times l}$ ir

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} (A)_{is} (B)_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Pavyzdžiai.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Sandauga $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ neapibrėžta.

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 41 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 19 & 34 \end{pmatrix}$.

.

Matome, kad sandauga tarp matricų ne visada apibrėžta, o kai net apibrėžta - ne visada komutatyvi: paskutiniai pavyzdžiai rodo, kad *ne visada* $AB = BA$.

Tiesinų lygčių sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matricų sandaugos veiksmo savybės:
S1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
S2.(sandaugos asociatyvumas) $(AB)C = A(BC)$.
S3. (distributyvumas) $(A + B)C = AC + BC$.
S4. (distributyvumas) $D(A + B) = DA + DB$.
Įrodysime sandaugos asociatyvumą.

Jeigu lygybės $(AB)C = A(BC)$ abi pusės yra apbrėžtos, tai $A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times r}, C \in M_{r\times s}$. Tada $AB \in M_{m\times r}$, $(AB)C \in M_{m\times s}$ ir $BC \in M_{n\times s}$, $A(BC) \in M_{m\times s}$. Taigi matricos $(AB)C$ ir $A(BC)$ yra to pačio dydžio. Turime

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{u=1}^{r} (AB)_{iu} \cdot (C)_{uj} = \sum_{u=1}^{r} \left(\sum_{v=1}^{n} (A)_{iv} (B)_{vu} \right) \cdot (C)_{uj} =$$
$$\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}} \left(\sum_{v=1}^{n} ((A)_{iv} (B)_{vu}) \cdot (C)_{uj} \right) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \left(\sum_{u=1}^{r} (A)_{iv} \cdot \left((B)_{vu} (C)_{uj} \right) \right) =$$
$$\sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \left((A)_{iv} \cdot \sum_{u=1}^{r} \left((B)_{vu} (C)_{uj} \right) \right) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \left((A)_{iv} \cdot (BC)_{vj} \right) = (A(BC))_{ij} .$$

Čia pasinaudojome skaičių distributyvumo savybe:
$\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}} \sum_{v=1}^{n} d_{uv} = \sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}} (d_{u1} + d_{u2} + \cdots + d_{un}) =$
$(d_{11} + d_{12} + \cdots + d_{1n}) + (d_{21} + d_{22} + \cdots + d_{2n}) + \cdots + (d_{r1} + d_{r2} + \cdots + d_{rn}) =$
$(d_{11} + d_{21} + \cdots + d_{r1}) + (d_{12} + d_{22} + \cdots + d_{r2}) + \cdots + (d_{1n} + d_{2n} + \cdots + d_{rn}) =$
$\sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} (d_{1v} + d_{2v} + \cdots + d_{rv}) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{u=1}^{r} d_{uv}.$
Įrodyta.

Paaiškinsime matricų sandaugos veiksmo apibrėžimą tiesininių keitinių kompozicijos veiksmu. Tegu turime du tiesinius kintamųjų keitinius:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k &= b_{k1}x_1 + b_{k2}x_k + \cdots + b_{kn}x_n \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} z_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1k}y_n \\ z_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2k}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mk}y_n \ . \end{aligned}$$

Užrašykime šiuos keitinius matricomis:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix},$$

čia $A = (a_{ij}) \in M_{m\times k}$ ir $B = (b_{ij}) \in M_{k\times n}$ - keitinių matricos.

Tada tiesinio keitinio $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ matrica $C = AB$.

Apibrėžimas. Kvadratinė matrica $I_n = (\delta_{ij}) \in M_{n\times n}$, $\delta_{ij} = \left[\begin{array}{l} 1, \text{ kai } i = j \\ 0, \text{ kai } i \neq j \end{array} \right.$ vadinama $n\Leftrightarrow$osios eilės **vienetine matrica**.

Akivaizdu ,kad su visomis matricomis $A \in M_{r\times n}$ ir $B \in M_{n\times s}$ teisingos lygybes:

$$A \cdot I_n = I_r \cdot A = A \text{ ir } I_n \cdot B = B \cdot I_s = B.$$

Apibrėžimas. Tegu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Matricą $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ vadiname **transponuota** matrica. Turime $\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$.

Matricos transponavimo operacija tenkina šias savybes:

T1. $(A+B)^T = A^T + B^T$, kai $A, B \in M_{m\times n}$.
T2. $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$, su visais λ.
T3. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, kai $A \in M_{m\times r}$, $B \in M_{r\times n}$.
T4. $\left(A^T\right)^T = A$.

Įrodysime T3 savybę.

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{u=1}^{r} (A)_{ju} (B)_{ui} =$$
$$\sum_{u=1}^{r} \left(A^T\right)_{uj} \left(B^T\right)_{iu} = \sum_{u=1}^{r} \left(B^T\right)_{iu} \left(A^T\right)_{uj} = \left(B^T \cdot A^T\right)_{ij}.$$

Įrodyta.

Nagrinėkime kvadratinių matricų aibę $M_{n\times n}(F) = M_n$. Aibėje M_n apibrėžtos matricų sumos, matricos sandaugos iš skaičiaus ir matricų sandaugos sandaugos operacijos. Šių operacijų atžvilgiu teisingos savybės:

V1-V8; S1-S4. Beto teisinga savybė:

S5.(vienetinės matricos egzistavimas) $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ su visomis $A \in M_n$.

Apibrėžimas. Matematinių objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis , daugyba iš skaičiaus, priklausančio F, ir daugyba, ir šie veiksmai tenkina savybes V1⇔V8 ir S1-S4 vadinama **algebra virš** F.

Turime, kad kvadratinių matricų aibė $M_n(F)$ yra algebra virš F. Pačios skaitinės aibės $\mathbf{Q}$ ir $\mathbf{R}$ yra algebros virš saves. Atsižvelgę į tai, kad

$$\lambda \cdot A = (\lambda I_n) \cdot A \text{ su visomis } A \in M_n(F) \text{ ir } \lambda \in F,$$

į kvadratinių matricų algebrą $M_n(F)$ galima žiūrėti kaip į aibės F "išplėtimą", jeigu skaičių λ sutapatinsime su matrica $\lambda \cdot I_n$. Funkcija $f : \lambda \to \lambda \cdot I_n$ yra bijekcija iš algebros F į algebrą $M_n(F)$, tenkinanti savybes(sako: "išlaiko operacijas"):

$$\begin{array}{c} f(\lambda + \mu) = f(\lambda) + f(\mu) \\ f(\lambda \cdot \mu) = f(\lambda) \cdot f(\mu). \end{array}$$

Pastebėkime, kad skaitinės algebros $\mathbf{Q}$ ir $\mathbf{R}$ (abi jas mes žymime raide F)pasižymi dar dviejomis sandaugos veiksmo savybėmis:

S6.(sandaugos komutatyvumas) Su visais λ ir $\mu \in F$ teisinga $\lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda$.

S7.(atvirkštinio elemento egzistavimas)Kiekvienam $\lambda \neq 0, \lambda \in F$ egzistuoja atvirkštinis skaičius: $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} : \lambda \cdot (\lambda^{-1}) = 1$.

Apibrėžimas. Matematinių objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba, ir šie veiksmai tenkina savybes analogiškos savybėms V1⇔V4 ir S2-S7 vadinama **kūnu.**

Taigi, turime realiųjų skaičių kūną $\mathbf{R}$ ir racionaliųjų skaičių kūną $\mathbf{Q}$. Atkreipkime dėmesį į tai, kad sveikųjų skaičių aibė $\mathbf{Z}$ nėra kūnas, nes joje neišpildyta savybė S7.

Mes jau žinome, kad kvadratinių matricų aibėje $M_n(F)$ negalioja sandaugos komutatyvumo savybė (ne su visomis matricomis teisinga $AB = BA$). Aptarkime dabar kvadratinių matricų aibėje savybę S7.

Apibrėžimas. Sakome, kad kvadratinė matrica $A \in M_n(F)$ turi atvirkštinę matricą, jeigu egzistuoja tokia kvadratinė matrica $B \in M_n(F)$, kad

$$AB = BA = I_n.$$

Teiginys (atvirkštinės matricos vienatinumas). Jeigu B ir C yra matricos A atvirkštinės, tai $B = C$.

Įrodymas.Tegu matricos B ir C yra matricos A atvirkštinės:
$AB = BA = I_n$ ir $AC = CA = I_n$. Tada

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

Įrodyta.

Pastaba. Matricos A atvirkštinę matricą žymi A^{-1} :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Teorema. Tegu $A \in M_n(F)$. Visos žemiau pateiktos sąlygos yra ekivalenčios.
1. Matrica A - neišsigimusi.
2. Homogeninių tiesinių lygčių sistema $AX = O$ turi vienintėlį sprendinį. Čia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ir $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. $\det A \neq 0$.
4. Matrica A turi atvirkštinę matricą.
5. Su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Prieš įrodant šią teoremą be įrodymo suformuluosime teiginį, kuriuo pasinaudosime teoremos įrodyme.

Teiginys. Tegu matricos A ir B tokios, kad apibrėžta AB. Tada

$$\text{rank}(AB) \le \text{rank}A,$$
$$\text{rank}(AB) \le \text{rank}B.$$

Teoremos įrodymas. Jau aukščiau matėme, kad $1 \Leftrightarrow 2$ (išvada iš Kroneckerio-Capellio teoremos) ir $1 \Leftrightarrow 3$ (praeitos paskaitos teiginys). Dabar įrodysime teiginius $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 5$. Turime, kad $\text{rank}A = n$. Tada

$$\text{rank}A \le \text{rank}(A|B) \le n.$$

Todėl

$$\text{rank}A = \text{rank}(A|B) = n$$

ir pagal Kroneckerio-Capellio teoremą tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Įrodyta.

$5 \Rightarrow 4$. Turime, kad su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Tegu stulpelis X_1 yra sistemos $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys, stulpelis X_2 - sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys ,..., stulpelis X_n - sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sprendinys. Tada kvadratinei matricai $Y = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$ teisinga:

$$AY = (AX_1|AX_2|\cdots|AX_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Parodysime, kad teisinga ir $YA = I_n$, t.y. matrica $Y = A^{-1}$.

Turime

$$n = \mathrm{rank} I_n = \mathrm{rank} AY = \mathrm{rank} Y \le n.$$

Todėl $\mathrm{rank} Y = n$ ir matricai Y, kaip ir matricai A, galioja 5 sąlyga, iš kurios mes gauname, kad egzistuoja matrica Z, su kuria $YZ = I_n$.

Tada

$$YA = YAI_n = YAYZ = YI_nZ = YZ = I_n.$$

Įrodyta.

$4 \Rightarrow 1$. Tegu matrica A turi atvirkštinę:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Tada

$$\mathrm{rank} AA^{-1} = \mathrm{rank} I_n = n$$

ir

$$n = \mathrm{rank} AA^{-1} \le \mathrm{rank} A \le n,$$

todėl $\mathrm{rank} A = n$ ir matrica A yra neišsigimusi.

Įrodyta.

Teorema įrodyta.

Teiginys(atvirkštinių matricų savybės). Tegu $A, B \in M_n(F) \Leftrightarrow$ matricos, turinčios atvirkštines. Tada:

1. $AB \Leftrightarrow$ matrica, turinti atvirkštinę, ir $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $A^{-1} \Leftrightarrow$ matrica, turinti atvirkštinę, ir $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Matrica I_n turi atvirkštinę.
4. Matrica A^T turi atvirkštinę: $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Įrodymas.1. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ ir $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.

2 ir 3. akivaizdu.

4. $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ ir $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n$.

Įrodyta.