6 paskaita. *Tiesinės lygčių sistemos.*

Tiesinių lygčių sistema vadiname sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21} + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

čia $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, yra skaičiai.
Skaičių $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ seka vadinama sistemos (1) sprendiniu, jei

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}.$$

Su kiekviena tiesinių lygčių sistema susijusios dvi matricos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - tiesinės lygčių sistemos (1) matrica,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ & \cdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$ - tiesinių lygčių sistemos (1) išplėstoji matrica.

Apibrėžimas. Tiesinių lygčių sistema turinti bent vieną sprendinį vadinama **suderinta**, priešingu atveju - **nesuderinta**. Dvi tiesinės lygčių sistemos vadinamos **ekvivalenčiomis**, jei šių sistemų spendinių aibės sutampa.

Elementarūs tiesinių lygčių sistemos pertvarkiai:
1. i - osios ir j -osios lygčių keitimas vietomis.
2. i -osios lygties daugyba iš nenulinio skaičiaus.
3. j -osios lygties, padaugintos iš skaičiaus, pridėjimas prie i -osios lygties.

Elementarūs tiesinių lygčių sistemos matricų A ir B pertvarkiai:

1. i - osios ir j -osios eilučių keitimas vietomis: $\begin{pmatrix} & \cdots & \\ & (i) & \\ \downarrow & \cdots & \uparrow \\ & (j) & \\ & \cdots & \end{pmatrix}$.

2. i -osios eilutės daugyba iš nenulinio skaičiaus: $\begin{pmatrix} \cdots \\ (i)\cdot\alpha \\ \cdots \end{pmatrix}$.

3. j -osios eilutės, padaugintos iš skaičiaus, pridėjimas prie i -osios eilutės: $\begin{pmatrix} \cdots \\ (i)+(j)\cdot\alpha \\ \cdots \\ (j) \\ \cdots \end{pmatrix}$.

Teiginys. *Elementarūs tiesinių lygčių sistemos matricų A ir B pertvarkiai nekeičia sistemos spendinių aibės.*

Įrodymas.1. 1-asis veiksmas yra ekvivalentumo veiksmas:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ \cdots \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j \\ \cdots \\ a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right. .$$

2. 2-asis veiksmas yra ekvivalentumo veiksmas:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \cdots \\ \alpha \cdot a_{i1}\alpha_1 + \alpha \cdot a_{i2}\alpha_2 + \cdots + \alpha \cdot a_{in}\alpha_n = \alpha \cdot b_i \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right. .$$

3. 3-asis veiksmas yra ekvivalentumo veiksmas:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \\ \cdots \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \cdots \\ (a_{i1} + a_{j1})\,\alpha_1 + (a_{i2} + a_{j2})\,\alpha_2 + \cdots + (a_{in} + a_{jn})\,\alpha_n = (b_i + b_j) \\ \cdots \\ a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \cdots + a_{jn}\alpha_n = b_j \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{array}\right. .$$

Įrodyta.

Apibrėžimas. Matricą

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & \mathbf{1} & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} & & & * & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & & \\
0 & \cdots & & & & 0 & \mathbf{1} & & & \\
0 & \cdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & & \cdots & & & \cdots & & & & \\
0 & \cdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array},$$

čia

$$\begin{array}{c}
1)\ 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_r \leq n; \\
2)\ a_{1j_1} = a_{2j_2} = \cdots = a_{rj_r} = 1; \\
3)\ a_{is_i} = 0, \text{ jei } s_i < j_i\ ,\ 1 \leq i \leq r; \\
4)\ a_{ti} = 0, \text{ jei } t > r,\ 1 \leq i \leq n,
\end{array}$$

vadinama **laiptuota matrica**.

Pavyzdys. Matricos $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & \Leftrightarrow 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ yra laiptuotos matricos, bet matrica $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & \Leftrightarrow 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nėra laiptuota matrica.

Nesunku matyti, kad jeigu matrica A yra laiptuota matrica, tai ir matricos $\begin{pmatrix} O & \mid & A \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 1 & \mid & * \\ O & \mid & \Leftrightarrow \\ O & \mid & A \end{pmatrix}$ yra laiptuotos matricos.

Teorema (Gauss) . Kiekvieną matricą A elementariaisiais veiksmais galima suvesti prie laiptuotos matricos, kurią vadiname laiptuotu matricos A pavidalu.

Įrodymas. Indukcija pagal matricos A stulpelių skaičių n.

1. Indukcijos bazė: $n = 1$. Tegu $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. Galimi du atvejai.

(a) $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{m1} = 0 \Rightarrow$ matrica A⇔laiptuota matrica.

(b) Egzistuoja toks $i, 1 \leq i \leq m$, kad $a_{i1} \neq 0$. Tada atlikime šiuos elementarius pertvarkius su matricos A eilutėmis: 1) sukeismime pirmąją ir i⇔ąją eilutes vietomis; 2) pirmąją eilutę daljame iš a_{i1}, 3) pirmąją eilutę padaugintą iš $\Leftrightarrow a_{j1}$ pridedame prie j⇔osoios eilutės, $2 \leq j \leq m$ ir $j \neq i$; ir pirmąją eilutę padaugintą iš $\Leftrightarrow a_{11}$ pridedame prie i⇔osios eilutės. Gausime laiptuotą matricą $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Indukcijos prielaida: matricą, turinčią mažiau nei n stulpelių galima suvesti prie laiptuoto pavidalo.

3. Indukcijos teiginys. Tegu matricoje A yra n stulpelių. Galimi du atvejai:

A. Matricos pirmasis stulpelis yra nulinis: $A = \begin{pmatrix} 0 & | & \\ \cdots & | & B \\ 0 & | & \end{pmatrix}$. Tada matricoje B yra $n \Leftrightarrow 1$ stulpelis ir pagal indukcijos prielaidą matricą B elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuoto pavidalo B'. Tada ir matricą A tais pačiais elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuotos matricos $A' = \begin{pmatrix} 0 & | & \\ \cdots & | & B' \\ 0 & | & \end{pmatrix}$.

B. Matricos A pirmasis stulpelis nėra nulinis. Neapribojant bendrojo atvejo, tegu $a_{11} \neq 0$ (jei $a_{11} = 0$, bet $a_{i1} \neq 0$, tai sukeiskime pirmąją ir i⇔ąją eilutes vietomis). Tada atlikime šiuos elementarius pertvarkius su matricos A eilutėmis: 1) pirmąją eilutę daljame iš a_{11}, 3) pirmąją eilutę padaugintą iš $\Leftrightarrow a_{j1}$ pridedame prie j⇔osoios eilutės, $2 \leq j \leq m$. Gausime matricą: $\begin{pmatrix} 1 & | & * \\ O & | & \Leftrightarrow \\ O & | & B \end{pmatrix}$. Matricoje B yra $n \Leftrightarrow 1$ stulpelis, todėl pagal indukcijos prielaidą matricą B elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuoto pavidalo B'. Tada ir matricą A tais pačiais elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuotos matricos $A' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ O & \Leftrightarrow \\ O & B' \end{array}\right)$.

Įrodyta.

Tiesinių lygčių sistemos (1) *sprendimas Gauss'o metodu.*

Paskutiniosios teoremos dėka mes tiesinių lygčių sistemos (1) išplėstąją matricą suvedame prie laiptuoto pavidalo:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_r & & & n & & \\
\end{array}\\
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & \cdots & \mathbf{1} & & & & & & & & c_1 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} & & * & & & & c_2 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & 0 & \mathbf{1} & & & & c_r \\
0 & \cdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{r+1} \\
\cdots & & \cdots & & & \cdots & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
\end{array}$$

Šią matricą atitinkanti tiesinių lygčių sistema yra

$$\left\{\begin{array}{cccccccc}
x_{1j_1}+ & & & \cdots & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & x_{2j_2}+ & & \cdots & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & \cdots & & & \\
 & & x_{rj_r}+ & \cdots & a_{rn}x_n & = & c_r \\
 & & & & 0 & = & c_{r+1}
\end{array}\right. .$$

Nagrinėdami šią sistemą, išskirsime kelis atvejus:

1. $c_{r+1} \neq 0$. Sistema nesuderinta.

2. $c_{r+1} = 0$ ir $r = n$. Tada sistema turi vieną sprendinį: $x_n = c_n, x_{n-1} = c_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1,n}c_n, ..., x_1 = c_1 \Leftrightarrow a_{1n}c_n \Leftrightarrow \cdots$.

3. $c_{r+1} = 0$ ir $r < n$. Tada sistema turi be galo daug sprendinių: visus laiptuose esančius kintamuosius $x_{1j_1}, ..., x_{rj_r}$ galima išreikšti nesančiais laiptuose kintamaisiais: $x_{rj_r} = c_r \Leftrightarrow a_{rj_r+1}x_{r+1} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow a_{rn}x_n$, ...

Apibrėžimas. Matricos A laiptuotame pavidale laiptų skaičių vadiname matricos A **rangu**: $\mathrm{rank}A = r$.

Vėliau matysime, kad matricos rango apibrėžimas yra korektiškas, t.y. matricos A laiptuotame pavidale laiptų skaičius yra apibrėžiamas pačia matrica A ir nepriklauso nuo elementarių matricos A pertvarkių.

Teorema (Kronecker-Capelli). Tiesinių lygčių sistema (1) yra suderinta tada ir tik tada, kai sistemos matricos rangas lygus išplėstosios matricos rangui: $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

Įrodymas remiasi tik apibrėžimais ir paliekamas skaitytojui.

Pastabos. 1. Jei tiesinių lygčių sistema (1) yra suderinta ir sistemos matricos rangas yra lygus sistemoje esančių kintamųjų skaičiui: $\mathrm{rank}A = n$, tai sistema turi vienintėlį sprendinį.

2. Jei tiesinių lygčių sistema (1) yra suderinta ir sistemos matricos rangas yra mažesnis negu sistemoje esančių kintamųjų skaičius: $\mathrm{rank}A < n$, tai sistema turi be galo daug sprendinių.

Apibrėžimas. Tiesinių lygčių sistema (1) vadinama **homogenine** tiesinių lygčių sistema, jei $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Pastabos. 1. Homogeninė tiesinių lygčių sistema visda suderinta.

2. Homogeninė tiesinių lygčių sistema turi be galo daug sprendinių tada ir tik tada, kai sistemos matricos rangas yra mažesnis negu sistemoje esančių kintamųjų skaičius: $\mathrm{rank}A < n$.

Apibrėžimas. Kvadratinė matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, kurios $\mathrm{rank}A = n$, vadinama **neišsigimusia**.

Teiginys. Kvadratinė matrica A yra neišsigimusi tada ir tik tada, kai $\det A \neq 0$.

Įrodymas. Tegu matricos A laiptuotas pavidalas B yra gaunamas šių elementariųjų pertvarkių: 1) pertvarkių, keičiančių eilutes vietomis:$P_1, ..., P_u$; 2) pertvarkių, dauginačių kurią nors matricos eilutę iš $\alpha_i \neq 0 : P_{\alpha_1}, ..., P_{\alpha_v}$; 3) pertvarkių, pridedančių prie vienos eilutės kitą, padaugintą iš nenulinio skaičiaus: $Q_1, ..., Q_t$. Tada turime:

$$\det B = (\Leftrightarrow 1)^u \, \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_v \det A.$$

Tada teiginį įrodo šių implikacijų seka:

$$A \Leftrightarrow \text{neišsigimusi} \Leftrightarrow \operatorname{rank} A = n \Leftrightarrow \operatorname{rank} B = n \Leftrightarrow \det B \neq 0 \Leftrightarrow \det A \neq 0.$$

Įrodyta.

Teiginys. Tiesinių lygčių sistema, kurios matrica A yra kvadratinė, turi vienintėlį sprendinį tada ir tik tada $\det A \neq 0$.

Įrodymas iš paskutinio teiginio.

.

.