4 paskaita. *Determinantai.*

2-oje paskaitoje matėme, kad sprendžiant dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas sprendinius patogu reikšti matricų determinantais. Apibendrinsime determinanto savoką didesnio matavimo matricoms, iš pradžių apsistodami ties trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemomis.

Tegu, turime trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą ir atlikime su ja nurodytus veiksmus:

$$\left\{\begin{array}{llll} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & |\cdot\ b_2c_3-b_3c_2 & |\cdot\ c_2a_3-c_3a_2 & |\cdot\ a_2b_3-a_3b_2 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & |\cdot\ b_3c_1-b_1c_3 & |\cdot\ c_3a_1-c_1a_3 & |\cdot\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & |\cdot\ b_1c_2-b_2c_1 & |\cdot\ c_1a_2-c_2a_1 & |\cdot\ a_1b_2-a_2b_1 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Kas kart sudėję turėsime:

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}$$
$$y=\frac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_1d_3c_2-a_2d_1c_3-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}$$
$$z=\frac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}$$

Nagrinėjamos tiesinės sistemos matrica vadinsime lentelę

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Sistemos sprendinio vardiklį sudaro 6 dėmenys: trys teigiami ir trys neigiami. Juos galima pavaizduoti ir taip:

$$\text{teigiami}\begin{pmatrix} a_1 & & b_1 & & c_1 \\ & \searrow & & & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \\ & \searrow & & \searrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 \\ & \searrow & & \searrow & \\ a_1 & & b_1 & & c_1 \\ & & & \searrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \end{pmatrix}, \text{ neigiami: }\begin{pmatrix} a_1 & & b_1 & & c_1 \\ & & & \nearrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ a_1 & & b_1 & & c_1 \\ & \nearrow & & & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 \end{pmatrix}$$

Apibrėžimas. Matricos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ **determinantu** vadiname išraišką:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Tada (1) sistemos sprendinius galima užrašyti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\ y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\ z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Šias formules vadiname *Cramer'io formulėmis.* Suprantama, sistema (1) turi sprendinį, kai $\det A \neq 0$.

Taigi:

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

Apibendrinkime tai n-osios eilės kvadratinėms matricoms: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} \pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \qquad (2)$$

čia sumuojama pagal visus aibės $\{1, 2, ..., n\}$ *kėlinius* $(i_1, i_2, ..., i_n)$. Prisiminkime, kad tokių kėlinių yra $n!$.

Parašykime 2-osios ir 3-iosios eilės determinantų išraiškose esančių dėmenų *antrųjų* indeksų lenteles:

matricai $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$:

su ženklu +	su ženklu -
$(1,2)$	$(2,1)$

matricai $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:

su ženklu +	su ženklu -
$(1,2,3)$	$(3,2,1)$
$(2,3,1)$	$(2,1,3)$
$(3,1,2)$	$(1,3,2)$

Matome, kad pusė dėmenų yra teigiamų, o pusė - neigiamų.

Patikslinsime determinanto išraiškoje (2) esančių dėmenų ženklus.

Apibrėžimas. Kėlinio $(i_1, i_2, ..., i_n)$ **inversija** vadinsime tokią skaičių porą $\{i_s, i_r\}$, $1 \leq i_s \neq i_r \leq n$, kad $i_s > i_r$, bet $s < r$, t.y. dešinėje kėlinyje esantis skaičius i_s yra mažesnis už kairėje esanį i_r.

Matricos determinanto išraiškoje (2) dėmuo $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ bus su ženklu "+", jei kėlinyje $(i_1, i_2, ..., i_n)$ yra lyginis inversijų skaičius ir su ženklu "-", jei - nelyginis. Jeigu kėlinyje $(i_1, i_2, ..., i_n)$ esančių inversijų skaičių pažymėsime $\mathrm{inv}(i_1, i_2, ..., i_n)$, tai gausime patikslintą (2) formulę:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)} (-1)^{\mathrm{inv}(i_1,i_2,\ldots,i_n)}\, a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \qquad (2')$$

čia sumuojama pagal visus aibės $\{1, 2, ..., n\}$ kėlinius $(i_1, i_2, ..., i_n)$.

Apibrėžimas. Kvadratinės matricos $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $(i,j)-$ **minoru** vadinsime matricos, gautos išbraukus matricoje A $i-$ąją eilutę ir $j-$ąjį stulpelį, determinantą: žymėsime $M_{i,j}(A)$, arba tiesiog $M_{i,j}$.

Teiginys. Tegu $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Tada teisinga:

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Įrodymas. $a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \det A.$

Įrodyta.

Šį teiginį galima apibendrinti:

Teiginys-apibrėžimas. Tegu $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Tada teisinga:

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}\, a_{1n}M_{1n}.$$

Dažnai teiginyje esančią lygybę ir vadina matricos A determinantu.

Galima apibendrinti teiginyje-apibrėžime esančią formulę:
Teorema.
Su visais $i = 1, 2, ..., n$ turime *determinanto skleidimo $i-$ąja eilute formulę*:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j}M_{i,j}.$$

Su visais $j = 1, 2, ..., n$ turime *determinanto skleidimo $j-$ uoju stulpeliu formulę*:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{i,j} M_{i,j}$$

Iš teiginio-apibrėžimo tiesiogiai turime svarbias determinanto savybes:

D1. Jeigu matricos kuris nors stulpelis yra nulinis, tai tos matricos determinantas yra lygus 0.

D2. Tegu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ir $a_{i,j} = 0$, kai $i < j$. Tada

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

D3. Tegu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ir $a_{i,j} = 0$, kai $i > j$. Tada

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

D4. Tegu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Matricą $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vadiname **transponuota** matrica. Tada

$$\det A = \det A^T.$$

D5. Jeigu matricos A du stulpeliai yra lygūs, tai $\det A = 0$.
D6. Jeigu matricos A dvi eilutės yra lygios, tai $\det A = 0$.
D7. Sukeitus du stulpelius arba dvi eilutes vietomis keičiasi determinanto ženklas.
D8. Determinantas yra tiesinė funkcija visų eilučių ir stulpelių atžvilgiu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + a'_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \cdots & ta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D9. Determinantas nesikeis, jei prie kurios nors eilutės(kurio nors stulpelio) pridėsime kitą eilutę (kitą stulpelį) galbūt padaugintą iš skaičiaus.

Pavyzdys. Trikampio $A\,(x_1, y_1)\, B\,(x_2, y_2)\, C\,(x_3, y_3)$ plotas yra:

$$S_{\triangle ABC} = \pm\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ženklas parenkamas taip, $S_{\triangle ABC} > 0$.
Turime

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} &= \tfrac{1}{2} \left(x_1 \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) = \\
&\tfrac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} y_2 & x_1 \\ y_3 & x_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_1 \\ x_3 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) = \\
&\tfrac{1}{2} \left(- \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 - y_1 \\ x_3 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right) = \\
&\tfrac{1}{2} \left(- \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_1 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 - y_1 \\ x_3 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right) = \\
&\tfrac{1}{2} \left(- \begin{vmatrix} x_1 & y_2 - y_1 \\ x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 - y_1 \\ x_3 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right) = \\
&\tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Pavyzdys. Tiesės, einančios per taškus $A\,(x_1, y_1)$ ir $B\,(x_2, y_2)$, lygtis yra:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Iš tikro, turime

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$
$$x\left(y_1 - y_2\right) - y\left(x_1 - x_2\right) + \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right).$$

Matome, kad (3) yra tiesės lygtis

$$ax + by + c = 0,$$

čia $a = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}, b = -\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$
Ši tiesė eina per taškus A ir B , nes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Paskutinįjį pavyzdį galima apibendrinti trimačiai erdvei.

Pavyzdys. Tegu turime tris *nekomplanarius* erdvės taškus $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$, $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$, $C\left(x_3, y_3, z_3\right)$. Tada lygtis

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

yra plokštumos,einančios per taškus A, B, C, lygtis:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

čia $a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, b = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$

Vėliau matysime, kad $ax + by + cz + d = 0$ yra bendroji plokštumos lygtis,jeigu tik ne visi a, b, c yra lygūs 0. Pastebėsime, kad $\pm\frac{1}{2}a$, $\pm\frac{1}{2}b$, $\pm\frac{1}{2}c$ yra trikampio ABC projekcijų koordinatinėse plokštumose yz, xz, xy plotai. Tai galima įrodyti ir tiesiogiai.

Tai, kad plokštuma (4) eina per taškus A, B, C galima įsitikinti tiesiogiai:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pavyzdys(Vandermondo determinantas).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le 3} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Atimkime iš 2-ojo ir 3-ojo stulpelių 1-ąjį ir poto išskleiskime determinantą 1-ąją eilute:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} =$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$