

3 paskaita: *Tiesės padėtis koordintinių ašių atžvilgiu. Kampas tarp tiesių. Tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygos. Taško atstumas iki tiesės.*

Sakykime $ax + by + c = 0$ yra tiesės t lygtis. Išnagrinėsime atskirus tiesės t padėtis ašių x ir y atžvilgiu.

1) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $b \neq 0$. Tada tiesės t lygtis yra $y = -\frac{c}{b}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti x ašiai.

2) $a \neq 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $x = -\frac{c}{a}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti y ašiai.

3) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $ax + by = 0$. Šiuo atveju tiesė t eina per koordinatinių pradžių.

4) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Tada tiesės t lygtis ekvivalenti lygčiai $\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y = 1$ ir jeigu $\alpha = \frac{-c}{a}, \beta = \frac{-c}{b}$, lygčiai $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$.

Tai **ašinė tiesės lygtis**.

Matome, kad taškai $(\alpha, 0)$ ir $(0, \beta)$ yra koordintinių ašių taškai, per kuriuos eina tiesė t .

Apibrėžimas. *Tiesės teigiama kryptimi vadiname tokia kryptį, kuria judėdant didėja taško ordinatė.*

Apibrėžimas. *Kampu φ tarp tiesių t_1 ir t_2 vadinsime tokį mažiausią neneigiamą kampą, kurio absoliuti reikšmė $< \pi$ ir kuriuo pasukus tiesę t_1 tiesės t_2 link, sutaps tiesių t_1 ir t_2 teigiamos kryptys.*

Rasime kampą tarp dviejų tiesių t_1 ir t_2 , nelygiagrečių y ašiai. Tokių tiesių lygtis galima išreikšti y atžvilgiu:

$$\begin{aligned}y &= k_1x + l_1 \\y &= k_2x + l_2,\end{aligned}$$

čia k_i – tiesės t_i krypties koeficientas ($k_i = \operatorname{tg}\alpha_i$, α_i – kampas tarp x ašies ir tiesės t_i), $i = 1, 2$;

l_i – atstumas nuo koordinatinių pradžių iki tiesės t_i susikirtimo su y ašimi taško. $i = 1, 2$.

Tegu $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Tada ieškomasis kampas yra lygus $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$. Tada

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Kampas φ parenkamas taip, kad galiojūtų $0 \leq \varphi < \pi$.

Tegu dviejų tiesių t_1 ir t_2 lygtys yra

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

arba (jeigu jos nelygiagrečios y ašiai)

$$\begin{aligned} y &= k_1x + l_1 \\ y &= k_2x + l_2, \end{aligned}$$

čia $k_i = -\frac{a_i}{b_i}, l_i = -\frac{c_i}{b_i}, i = 1, 2$.

Teorema 1. *Tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios arba sutampa tada ir tik tada, kada*

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0.$$

Teorema 2. *Tiesės t_1 ir t_2 yra statmenos tada ir tik tada, kada*

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Teoremos 1 įrodymas.

Įrodysime teiginį iš kairės į dešinę.

Tegu tiesės t_1 ir t_2 lygiagrečios. Tada

$$0 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}, \text{ čia } \varphi(=0) \text{ – kampas tarp } t_1 \text{ ir } t_2.$$

ir todėl $k_1 - k_2 = 0$, arba $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$.

Įrodysime teiginį iš dešinės į kairę.

Nagrinėkime du atvejus.

1) $b_1 \neq 0$. Tada ir $b_2 \neq 0$, nes priešingu atveju ir $a_2 = b_2 = 0$, o tai negalima. Tada turime

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}, \text{ arba } k_1 = k_2,$$

t.y. tiesės su x ašimi sudaro tą patį kampą. O tai įmanoma tik tuo atveju jeigu tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios arba sutampa.

2) $b_1 = 0$. Tada ir $b_2 = 0$, nes $a_1 \neq 0$. Taigi abi tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios y ašiai, todėl ir $t_1 \parallel t_2$.

Įrodyta.

Teoremos 2 įrodymas.

Įrodysime teiginį iš kairės į dešinę.

Tegu tiesės t_1 ir t_2 statmenos. Tada

$$\infty = \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}, \text{ čia } \varphi (= \frac{\pi}{2}) - \text{kampas tarp } t_1 \text{ ir } t_2.$$

ir todėl $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, arba $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Įrodysime teiginį iš dešinės į kairę.

Nagrinėkime tris atvejus.

1) $b_1 \neq 0$. Jei $b_2 \neq 0$, tai

$$1 + \left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = 0$$

$$\text{arba } 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \text{ ir } \operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{k_1 - k_2}{0} = \infty.$$

t.y. tiesės statmenos.

2) $b_1 \neq 0$. Jei $b_2 = 0$, tai $a_2 \neq 0$ ir tada būtinai $a_1 = 0$. Tada tiesė t_1 yra lygiagreti x ašiai, o tiesė t_2 yra lygiagreti y ašiai. Taigi $t_1 \perp t_2$.

3) $b_1 = 0$. Tada $a_1 \neq 0$ ir tada būtinai $a_2 = 0$. Tada tiesė t_1 yra lygiagreti y ašiai, o tiesė t_2 yra lygiagreti x ašiai. Taigi $t_1 \perp t_2$.

Įrodyta.

Rasime taško atstumo iki tiesės formulę.

Teiginys. Taško $M(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės $t: ax + by + c = 0$ yra lygus

$$\frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Įrodymas. Nesunku matyti, kad tiesė t_\perp

$$\begin{aligned} b(x - m_1) - a(y - m_2) &= 0 \\ bx - ay + am_2 - bm_1 &= 0 \end{aligned}$$

yra statmena tiesei t (žr. teoremos 2 sąlygą). Tegu $N(n_1, n_2)$ – tiesių t ir t_\perp susikirtimo taškas.

Aišku, kad Taško $M(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės t yra atkarpos MN ilgis:

$$MN = \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2}$$

Taškas N yra abiejose tiesėse t ir t_\perp , todėl

$$\begin{cases} an_1 + bn_2 + c = 0 \\ b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2) = 0 \end{cases}$$

Turime

$$am_1 + bm_2 + c = am_1 + bm_2 - (an_1 + bn_2) = a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2).$$

Nagrinėkime sistemą

$$\begin{cases} b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2) = 0 \\ am_1 + bm_2 + c = a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2) \end{cases}.$$

Pakėlę šios sistemos abi lygtis kvadratu ir poto sudėję turėsime

$$(am_1 + bm_2 + c)^2 = (a^2 + b^2) \left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 \right)$$

arba

$$\begin{aligned} |am_1 + bm_2 + c| &= \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{\left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2 \right)} \\ |am_1 + bm_2 + c| &= \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot MN \\ MN &= \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Įrodyta.

Vektorinės tiesės lygtys.

Prisiminkime vektorius. Tegu xy plokštumos vektorius $\vec{v} = (X, Y)$ su teigiamomis koordinatų ašimis Ox ir Oy sudaro kampus α ir β . Šių kampų kosinusai $\cos \alpha, \cos \beta$ vadinami vektoriaus \vec{v} **krypties kosinusais**. Tada teisingos šios lygtys:

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}; \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

bet

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1.$$

Aptarkime kai kuriuos tiesės lygties pavidalus.

1. *Tiesės t , einančios per tašką $A(x_0, y_0)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}(a, b)$, lygtis.*

Tegu $B(x, y)$ – bet kuris tiesės t taškas. Tada vektoriai $\vec{n}(a, b)$ ir $\vec{AB}(x - x_0, y - y_0)$ yra statmeni:

$$\begin{aligned} \vec{n}(a, b) \cdot \vec{AB}(x - x_0, y - y_0) &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Tai ir yra ieškomoji lygtis, o vektorius \vec{n} vadinamas tiesės t **normalės vektoriumi**.

2. *Kanoninė tiesės t lygtis.*

Tegu $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$ – du tiesės t taškai. Žinome, kad tiesės t lygtis tada yra

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Vektorius $\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (l, m) = \vec{s}$ vadinamas tiesės t **krypties vektoriumi** ir lygtis

$$\frac{y - y_1}{m} = \frac{x - x_1}{l}$$

kanonine tiesės t lygtimi.

3. Parametrinė tiesės t lygtis.

Iš kanoninės tiesės t lygties turime, kad

$$\frac{y - y_1}{m} = \frac{x - x_1}{l} = t$$

ir gauname **parametrinę tiesės t lygtį**:

$$\begin{aligned}x &= l \cdot t + x_1 \\y &= m \cdot t + y_1,\end{aligned}$$

čia $t \in \mathbf{R}$.

4. Normalioji tiesės $t : ax + by + c = 0$ lygtis.

Padauginę panariui bendrąją tiesės t lygtį iš $\text{sign}(-c) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

čia $\text{sign}(c) = \begin{cases} 1, & \text{jei } c \geq 0 \\ -1, & \text{jei } c < 0 \end{cases}$ ir pažymėję

$$\cos \alpha = \text{sign}(-c) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \beta = \text{sign}(-c) \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad -p = \text{sign}(-c) \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

gausime normaliąją tiesės lygtį:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0.$$

Teigiamo skaičiaus p reikšmė - tai koordinatinių pradžių atstumas iki tiesės, o $\vec{n}_0(\cos \alpha, \cos \beta)$ - **vienetinis normalės vektorius**.

5. Vektorinė tiesės t lygtis.

Tegu tiesė t eina per tašką $A(x_0, y_0)$ ir statmena normalės vektoriui \vec{n} . Tegu $B(x, y)$ - bet kuris tiesės taškas ir vektoriai $\vec{r} = \vec{OB}$, $\vec{r}_0 = \vec{OA}$. Tada vektoriai $\vec{r} - \vec{r}_0$ ir \vec{n} - statmeni:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Tai ir yra **vektorinė tiesės t lygtis**.

Pastebėsime, kad vietoje \vec{n} paėmus vienetinį normalės vektorių \vec{n}_0 turėsime:

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 = p,$$

čia p – koordinačių pradžios atstumas iki tiesės.

Pastaba. Jeigu tiesė $t: (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$ yra lygiagreti vektoriui $\vec{s} = (l, m)$, tai vektoriai $\vec{r} - \vec{r}_0$ ir \vec{s} kolinearūs, t.y.

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}_0 &= \vec{s} t \\ \vec{r} &= \vec{r}_0 + \vec{s} t, t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Gavome *tiesės, lygiagrečios vektoriui \vec{s} , vektorinę lygtį.*

Norint iš tiesės vektoriinių lygčių gauti koordinatines lygtis, reikia atlikti šiuos pakeitimus:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\longrightarrow x \vec{i} + y \vec{j} \\ \vec{r}_0 &\longrightarrow x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} \\ \vec{n} &\longrightarrow a \vec{i} + b \vec{j} \\ \vec{n}_0 &\longrightarrow \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} \\ \vec{s} &\longrightarrow l \vec{i} + m \vec{j} \end{aligned} .$$

Norint iš tiesės koordinatinių lygčių gauti vektorines lygtis, reikia atlikti šiuos pakeitimus:

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow \vec{r} \cdot \vec{i} \\ y &\longrightarrow \vec{r} \cdot \vec{j} \\ a &\longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{i} \\ b &\longrightarrow \vec{n} \cdot \vec{j} \\ \cos \alpha &\longrightarrow \vec{n}_0 \cdot \vec{i} \\ \cos \beta &\longrightarrow \vec{n}_0 \cdot \vec{j} \\ l &\longrightarrow \vec{s} \cdot \vec{i} \\ m &\longrightarrow \vec{s} \cdot \vec{j} \end{aligned} .$$