

2 paskaita: *Dekarto koordinatinių sistema. Kreivės lygties sąvoka. Kreivių susikirtimo taškai. Bendroji tiesės lygtis $ax + by + c = 0$ su įrodymu. Dviejų tiesių sankirtos taškai.*

Plokštuma xy , tai plokštuma, kurioje pravažtos dvi statmenos viena kitai tiesės Ox ir Oy , susikertančios taške O . Taškas O dalija kiekvieną iš šių tiesių į du spindulius: vieną iš jų kiekvienoje tiesėje vadiname teigiamą kryptimi, kitą - neigiamą.

Dekarto koordinatinių sistema, tai xy plokštuma, kurioje su kiekviena skaičių pora x, y galima vienareikšmiškai susieti plokštumos xy tašką A , kurio abscisė yra x , o ordinatė - y .

Tegu dabar xy plokštumoje yra kreivė γ . Sakysime, kad lygtis $f(x, y) = 0$ yra duotos *kreivės lygtis*, jeigu 1) visų kreivės γ taškų koordinatės x ir y tenkina šią lygtį ir 2) skaičių pora x, y , tenkinanti lygtį $f(x, y) = 0$, yra kreivės γ taško koordinatės.

Tegu plokštumoje xy duotos dvi kreivės:

kreivė γ_1 ir jos lygtis $f_1(x, y) = 0$;

kreivė γ_2 ir jos lygtis $f_2(x, y) = 0$.

Tegu $A(x, y)$ yra kreivių γ_1 ir γ_2 susikirtimo taškas. Tada taško koordinatės tenkina tiek lygtį $f_1(x, y) = 0$, tiek lygtį $f_2(x, y) = 0$, t.y. skaičių x, y pora yra sistemos
$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$
 sprendinys. Akivaizdu, kad teisingas ir atvirkščias teiginys: bet kuris sistemos sprendinys x, y atitinka kreivių susikirtimo tašką A , kurio koordinatės yra x, y .

Aptarsime dabar paprasčiausią kreivės pavyzdį - tiesę.

Tiesioginė teorema. *Bet kurios tiesės t lygtis yra $ax + by + c = 0$, čia a, b, c - skaičiai.*

Atvirkštinė teorema. *Tegu a ir b - du kartu nelygūs skaičiai. Tada egzistuoja tokia tiesė, kurios lygtis yra $ax + by + c = 0$.*

Tiesioginės teoremos įrodymas. Tegų $B(x_1, y_1)$ ir $C(x_2, y_2)$ - du simetriški tiesės t atžvilgiu taškai. Remiantis trikampių lygumo požymiais ir lygiašonio trikampio savybėmis turime, kad taškas $A(x, y)$ yra tiesės t taškas tada ir tik tada, kada $BA = CA$. Todėl tiesės lygtis yra

$$(\mathbf{x} - x_1)^2 + (\mathbf{y} - y_1)^2 = (\mathbf{x} - x_2)^2 + (\mathbf{y} - y_2)^2.$$

Suprastinus turėsime

$$2(x_2 - x_1)\mathbf{x} + 2(y_2 - y_1)\mathbf{y} + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0.$$

Įrodyta.

Atvirkštinės teoremos įrodymas.

Tegų plokštumos xy skirtingų taškų $M(m_1, m_2)$ ir $N(n_1, n_2)$ koordinatės yra lygties $ax + by + c = 0$ sprendiniai, o tiesės MN lygtis yra $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Tada taškų M ir N koordinatė yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

sprendiniai. Taškai M ir N yra skirtingi, todėl skiriasi nors viena šių taškų koordinatė, sakykime $m_1 \neq n_1$. Padauginkime (1) sistemos pirmąją lygtį iš b_1 , o antrąją - iš $-b$ ir sudėkime gautas lygtis. Turėsime

$$(ab_1 - a_1b)x + (cb_1 - c_1b) = 0.$$

Šios lygties sprendiniais yra **du skirtingi** skaičiai m_1 ir n_1 , todėl

$$(ab_1 - a_1b) = 0 \text{ ir } (cb_1 - c_1b) = 0, \text{ t.y.}$$

sistemos (1) lygtys yra ekvivalentiškos ir tiesės

$$ax + by + c = 0 \text{ ir } a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

sutampa.

Įrodyta.

Dviejų tiesių susikirtimo taškai.

Tegu plokštumoje duotos dvi tiesės t_1 ir t_2 , kurių lygtys atinkamai

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ ir } a_2x + b_2y = c_2.$$

Susikirtimo taškų koordinatės yra sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2)$$

sprendiniai. Surasime tiesių t_1 ir t_2 susikirtimo taškus. Tegu $A(x, y)$ yra tiesių t_1 ir t_2 susikirtimo taškas. Išreikškime taško A koordinatas x ir y sistemos (2) koeficientais $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.

Padauginkime pirmąją lygtį iš b_2 , antrąją - iš $-b_1$ ir sudėkim lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1. \quad (3)$$

Padauginkime dabar pirmąją lygtį iš $-a_2$, antrąją - iš a_1 ir sudėkim lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$, tai

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)} \text{ ir } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

Šiuo atveju turime vieną susikirtimo tašką.

Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$, tai galimi du atvejai:

1) $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ ir 2) $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$.

Pirmuoju atveju sistemoje (2) yra dvi ekvivalenčios lygtys, t.y. tiesės t_1 ir t_2 sutampa, t.y. yra be galo daug susikirtimo taškų.

Antruoju atveju sistema (2) neturi sprendinių, nes iš (3) turime, kad $0 = c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, t.y. tiesės t_1 ir t_2 neturi susikirtimo taškų ir todėl jos yra lygiagrečios: $t_1 \parallel t_2$.

Apibrėžimas. Lentelę $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ vadiname lygčių sistemos (2) matrica.

Apibrėžimas. Išraišką $a_1b_2 - a_2b_1$ vadiname matricos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ **determinantu** ir žymime:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Tuo atveju kai tiesės kertasi viename taške, to taško koordinatės galima užrašyti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ir } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Tokių sistemos (2) sprendinių pavidalą vadina *Cramer*'io formulėmis.