Algebra ir geometrija informatikams. Paskaitų konspektas. Rimantas Grigutis

14 paskaita. Tiesinės transformacijos ir fraktalai plokštumoje.

Tiesinės transformacijos plokštumoje.

13.1 Apibrėžmas. *Funkcija* T *plokštumos* R^2 *vektoriui* (x, y) *lygybėmis*

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y \\ v &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

priskirianti vektorių (u, v), $T(x, y) = (u, v)$, *vadinama tiesine transformacija.*

Tiesinę transformaciją T apibrėžiančias lygybes (1) galima reikšti ir matricomis

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – tiesinės transformacijos T matrica.
Norėdami pabrėžti ryšį tarp transformacijos T ir jos matricos transformacijos matricą žymi $[T]$.

13.2 Pavyzdžiai. 1. Transformacija T_0,kurios matrica yra nulinė: $[T_0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, vadinama *nuline transformacija.* Turime

$$[T_0] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Transformacija T_I, kurios matrica yra vienetinė: $[T_I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vadinama *vienetine transformacija.* Turime

$$[T_I] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pateiksime kitus svarbius tiesinių transformacijų plokštumoje pavyzdžius.

Tiesinis ištempimas ir tiesinis suspaudimas.

13.3 Apibrėžimas. *Tegu* k *- neneigiamas skaičius. Tada transformacija* $T_k(x, y) = (kx, ky)$*vadinama ištempimu, jei* $k \geq 1$ *, ir suspaudimu, jei* $0 \leq k \leq 1$.

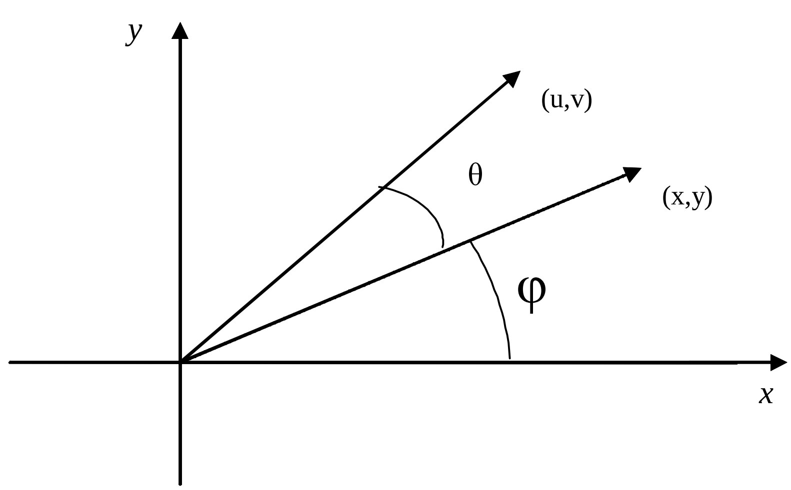
Tiesinio ištempimo, suspaudimo plokštumoje matrica yra

$$[T_k] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$[T_k] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Posūkio transformacijos plokštumoje.

13.4 Apibrėžimas. *Posūkio transformacija kampu* θ *plokštumoje vadiname tiesinę transformaciją* T^{θ}*, kuri kiekvieną plokštumos vektorių pasuka prieš laikrodžio rodyklę kampu* θ.



Posūkio transformacijos matrica T^θ yra

$$[T^\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

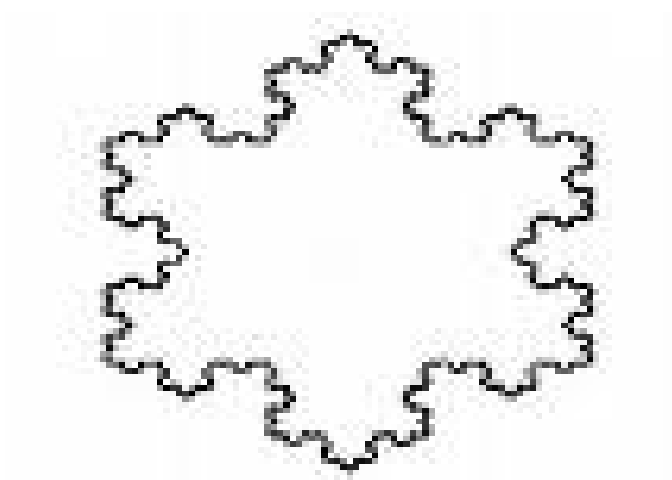
ir

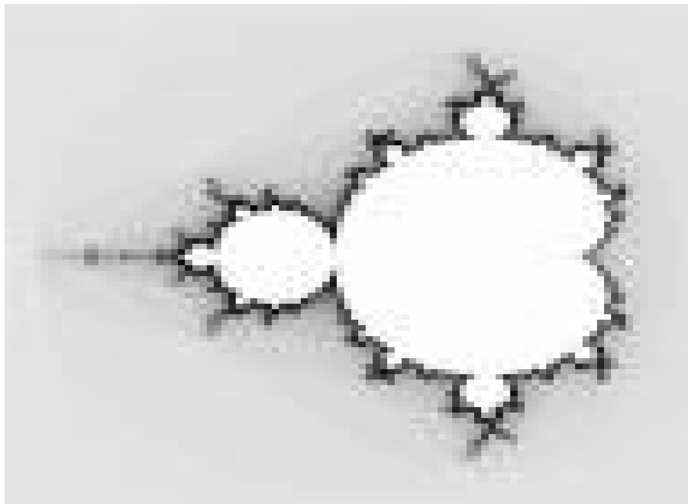
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Fraktalai

13.5 Apibrėžimas. *Fraktalas yra geometrinis objektas, sudarytas iš panašių į save geometrinių objektų.*

Fraktalai yra žinomi jau daugiau nei šimtą metų, bet tik paskutiniuosius 40 metų jie nagrinėjami matematiškai. Tokio nagrinėjimo pradžia tradiciškai laikoma Benoit Mandelbrot'o knyga išleista 1977 metais.





Skaitiniu fraktalo pavyzdžiu galėtų būti Paskalio trikampis užrašytas mod 2.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Paskalio trikampis, kai N=7

1

1 1

1 0 1

1 1 1 1

1 0 0 0 1

1 1 0 0 1 1

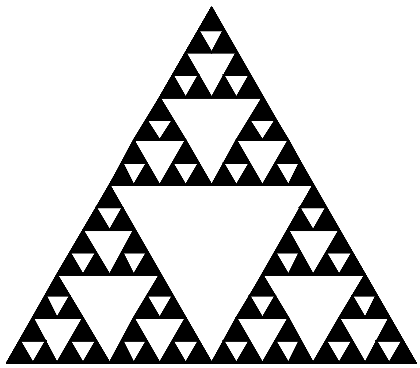
1 0 1 0 1 0 1

1 1 1 1 1 1 1 1

Paskalio trikampis mod2

Pastarasis trikampis, kurio kiekviena kraštinė sudaryta iš 8 vienetukų, sudarytas iš trijų trikampių, kurių kiekviena kraštinė sudaryta iš 4 vienetukų. Savo ruoštu, kiekvienas šis trikampis, kurio kiekviena kraštinė sudaryta iš 4 vienetukų, sudarytas iš trijų trikampių, kurių kiekviena kraštinė sudaryta iš 2 vienetukų.

Panašų vaizdą mes matysime ir su kitais N, o kai N$\rightarrow \infty$, tai matysime klasikinį Serpinskio trikampį(1916 metais lenkų matematiko Waclaw Serpinski nagrinėtas fraktalas):

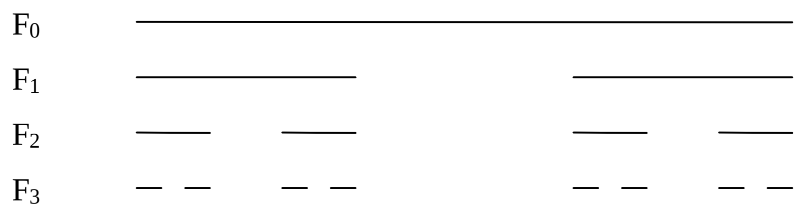


Matematiškai fraktalus galima apibrėžti keliais būdais. Vienas iš jų - apibrėžimas funkcijomis.

13.6 Pavyzdys. Kantoro aibė(Cantor set). Tegu aibėje $F=[0;1]$ apibrėžtos dvi funkcijos $f_1(x)=\dfrac{1}{3}x$, $f_2(x)=\dfrac{x+2}{3}$

Fraktalus gausime, jei nagrinėsime šių funkcijų vaizdų sąjungas:

$$\begin{gathered}
F_0=F,\\
F_1=f_1(F_0)\cup f_2(F_0),\\
F_2=f_1(F_1)\cup f_2(F_1),\\
...,\\
F_n=f_1(F_{n-1})\cup f_2(F_{n-1}),\\
...
\end{gathered}$$

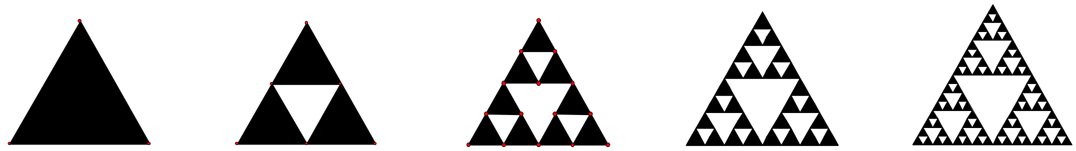


13.7 pavyzdys. Serpinskio trikampis. Tegu kompleksinės plokštumos trikampyje, kurio viršūnės yra $(0;0)\,,(0;1)$ ir $\left(\frac{1}{2};e^{\frac{\pi i}{3}}\right)$,čia $e^{\frac{\pi i}{3}}$ yra 6-ojo laipsnio šaknis iš 1, apibrėžtos trys funkcijos

$$f_1\left(z\right)=\tfrac{z}{2}, f_2\left(z\right)=\tfrac{z+e^{\frac{\pi i}{3}}}{2}, f_3\left(z\right)=\tfrac{z+1}{2}.$$

Fraktalus gausime, jei nagrinėsime šių funkcijų vaizdų sąjungas:

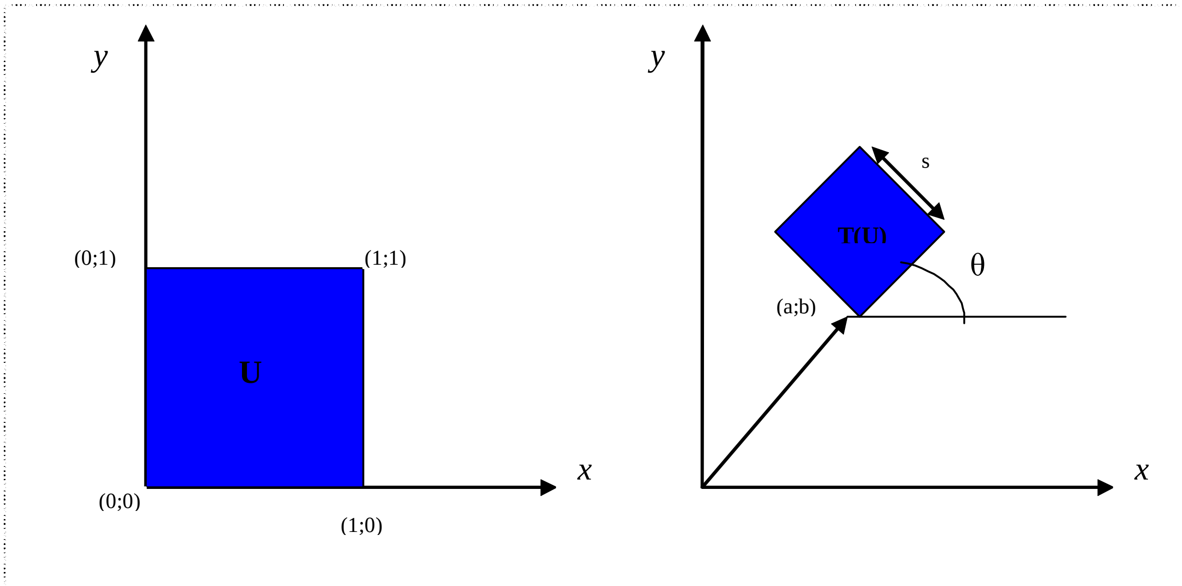
$$\begin{gathered}F_0=F,\\ F_1=f_1\left(F_0\right)\cup f_2\left(F_0\right)\cup f_3\left(F_0\right),\\ F_2=f_1\left(F_1\right)\cup f_2\left(F_1\right)\cup f_3\left(F_1\right),\\ ...,\\ F_n=f_1\left(F_{n-1}\right)\cup f_2\left(F_{n-1}\right)\cup f_3\left(F_{n-1}\right)\\ ...\end{gathered}$$



13.8 Apibržėžimas. *Panašumo transformacija (similitude) plokštumoje yra*

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix},$$

čia s,θ, a *ir* b *yra skaičiai. Beto mūsų atvejais* $0<s<1$*:*



Fraktalus galima apibrėžti specialiu būdu parenkant panašumo atvaizdžius $\mathrm{T}_1, T_2, ..., T_k$ ir konstruojant pačius fraktalus $\mathrm{S}_1, S_2, ..., S_n, ...$, kuriuos apibrėžiame induktyviai:

0 žingsnis	Parenkame aibę $\mathrm{S}_0 \subset \mathbf{R}^2$
1 žingsnis	$S_1 = T_1(S_0) \cup T_2(S_0) \cup \cdots \cup T_k(S_0)$
2 žingsnis	$S_2 = T_1(S_1) \cup T_2(S_1) \cup \cdots \cup T_k(S_1)$
3 žingsnis	$S_3 = T_1(S_2) \cup T_2(S_2) \cup \cdots \cup T_k(S_2)$
$\cdots$	$\cdots$
n žingsnis	$S_n = T_1(S_{n-1}) \cup T_2(S_{n-1}) \cup \cdots \cup T_k(S_{n-1})$
$\cdots$	$\cdots$

13.9 Pavyzdys. Kantoro aibė. Tegu

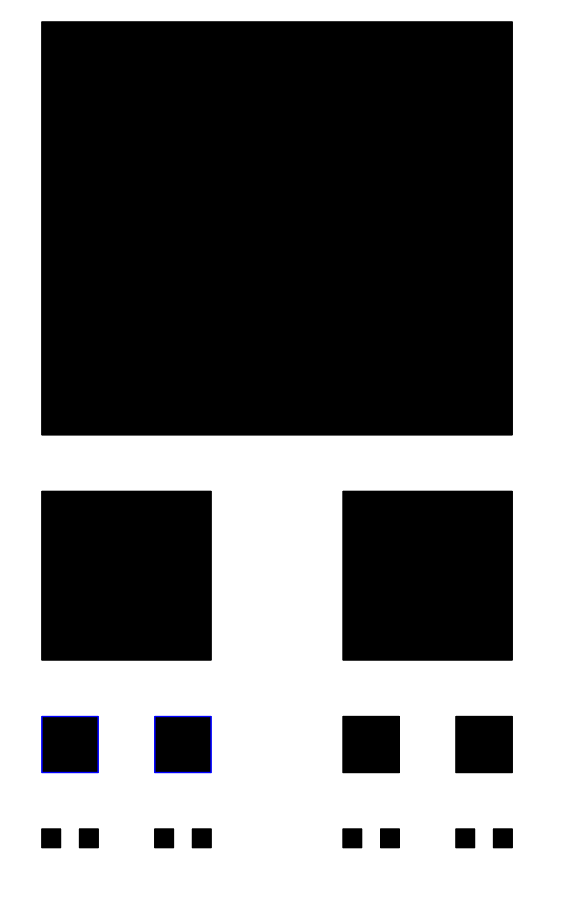
$$T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ir

$$T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

dvi panašumo transformacijos. 13.6 pavyzdyje gautą fraktalus gausime jeigu $\mathrm{S}_0 = F = [0; 1]$.

Kitu Kantoro aibės pavyzdžiu galėtų būti fraktalai gauti, jei S_0 būtų kvadratas su viršūnėmis taškuose $(0;0)\,,(0;1)\,,(1;1)$ ir $(1;0)$:



13.10 Pavyzdys. Serpinskio trikampis. Tegu

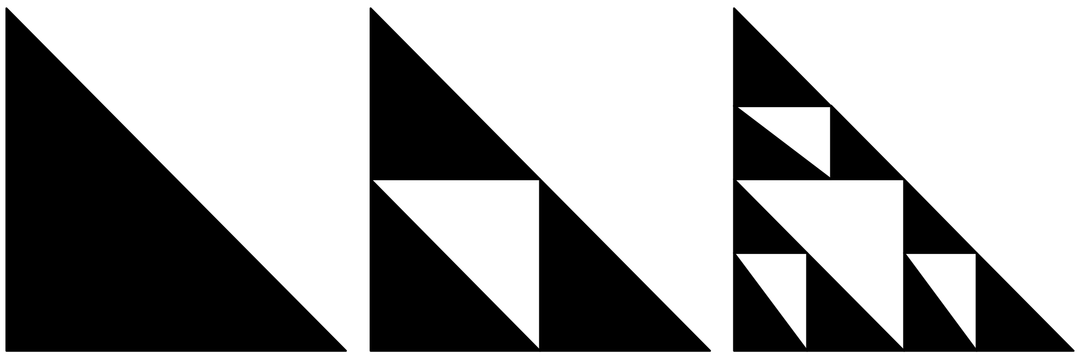
$$T_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ir}$$

$$T_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

trys panašumo transformacijos.

Serpinskio trikampio pavyzdžiu galėtų būti fraktalai gauti, jei S_0 būtų statusis trikampis su viršūnėmis taškuose $(0;0)\,,(0;1)$ ir $(1;0)$:



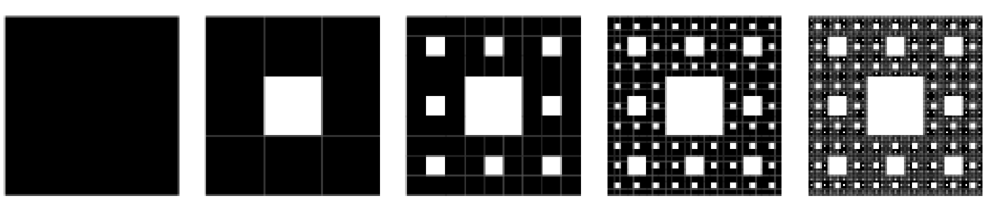
13.11 Pavyzdys. Serpinskio kilimas. Tegu

$$T_i\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix},\ i = 1, 2, ..., 8$$

čia aštuoni vektoriai $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ yra

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Serpinskio kilimo pavyzdžiu galėtų būti fraktalai gauti, jei S_0 būtų kvadratas su viršūnėmis taškuose $(0;0)\,,(0;1)\,,(1;1)$ ir $(1;0)$:



Norint sukonstruoti panašumo transformacijomis fraktalus kompiuteriu reiktų ieškoti visų pikselių, kurie sudaro aibes $\mathrm{S}_0, S_1, S_2, ...$,vaizdus.Tai reikalauja labai daug veiksmų ir trunka ilgai

1985 metais Michael Barnsley pasiūlė alternatyvų fraktalų konstravimo metodą - *atsitiktinių iteracijų algoritmą* (teoriškai jis grindžiamas tikimybių teorijos Monte Karlo metodu):

0 žingsnis	Parenkame bet kurį tašką $\mathrm{x}_0 \subset \mathbf{R}^2$
1 žingsnis	atsitiktinai renkamės $\mathrm{T}_{k(1)}$ ir randame $x_1 = T_{k(1)}\,(x_0)$
2 žingsnis	atsitiktinai renkamės $\mathrm{T}_{k(2)}$ ir randame $x_2 = T_{k(2)}\,(x_1)$
3 žingsnis	atsitiktinai renkamės $\mathrm{T}_{k(3)}$ ir randame $x_3 = T_{k(3)}\,(x_2)$
$\cdots$	$\cdots$
n žingsnis	atsitiktinai renkamės $\mathrm{T}_{k(n)}$ ir randame $x_n = T_{k(n)}\,(x_{n-1})$
$\cdots$	$\cdots$

Užduotis.Atsitiktinių iteracijų metodas Serpinskio kilimui.

Tegu $\mathrm{x}_0 = (0;0)$ - pradinis taškas.Atsitktinai pasirinkite dešimt Serpinskio kilimą apibrėžiančių panašumo transformacijų ir atlikite atsitiktinių iteracijų algoritmą. Taškus pavaizduokite plokštumoje.