Tiesinės algebros ir geometrijos paskaitos bioinformatikams.

Rimantas Grigutis

13 Paskaita. Ortogonalios transformacijos Euklido erdvėje $\mathbf{R}^3$ ir jų matricos

Nagrinėjama Euklido erdvė $\mathbf{R}^3$ su standartine skaliarine sandauga:

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

13.1 Apibrėžimas. *Transformacija $\mathcal{B} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vadinamas ortogonalia transformacija, jei $\mathcal{B}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.*

Žinome, kad skaliarinę sandaugą Euklido erdvėje $\mathbf{R}^3$ galima reikšti matricų sandauga:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u}^T \ .$$

Vektorių ir jų transformacijų vaizdų reiškimą koordinatiniais stulpeliais galima pavaizduoti tokia diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(\mathbf{u}) & = & \mathbf{w} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\mathbf{u}^T & = & \mathbf{w}^T \end{array} .$$

Apatinę lygybę galima parašyti išskleistu pavidalu:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} .$$

Tokiu būdu, vektorius

$$\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T = \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right)^T$$
$$= (b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}^T = \mathbf{u}B^T.$$

Turime $\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}B^T$.

Tegu $\mathcal{B}-$ ortogonalioji transformacija. Tada teisinga

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) \cdot \mathcal{B}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}B^T \cdot \mathbf{v}B^T = \left(\mathbf{v}B^T\right)\left(\mathbf{u}B^T\right)^T = \mathbf{v}B^T B\mathbf{u}^T = \mathbf{v}\left(B^T B\right)\mathbf{u}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T.$$

Iš čia turime, kad ortogonaliosios transformacijos matrica tenkina lygybę

$$B^T B = I.$$

13.2 Teiginys. *Tegu $B-$ kvadratinė matrica. Šie penki teiginiai yra ekvivalentūs:*

1) B yra neišsigimusi matrica ir $B^{-1} = B^T$.
2) $BB^T = I$.
3) $B^T B = I$.
4) matricos B eilutės yra ortonormuotos.
5) matricos B stulpeliai yra ortonormuoti.
6) matricos B tikrinių reikšmių modulis yra 1.

Matrica B tenkinanti šias savybes vadinama *ortogonalia matrica.*

13.3 Teiginys.
1) Ortoganalių matricų aibė $O_n(\mathbf{R})$ yra grupė sandaugos atžvilgiu.
2) Ortogonalios matricos determinantas lygus ± 1.

13.4 Pavyzdys (2×2 ortogonaliosios matricos).
Ortogonali 2×2 matrica turi vieną iš dviejų pavidalų:
$B_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ arba $B_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Transformacija, kurios matrica B_1 posūkio kampu φ transformacija, o transformacija, kurios matrica C_2 simetriškai atvaizduoja x ašies atžvilgiu ir pasuka kampu φ apie y ašį. .

13.5 Teiginys.*Ortonormuotų bazių keitimo matrica yra ortogonali.*

Įrodymas. Tegu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ir $\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3$ dvi ortonormuotos bazės ir

$$(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)\, C,$$

čia $C-$ keitimo matrica. Turime

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{u}'_3 \\ \mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{u}'_1 & \mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{u}'_2 & \mathbf{u}'_3 \cdot \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}'_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3) \\
&= C^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)\, C \\
&= C^T \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 \end{pmatrix} C \\
&= C^T I C = C^T C = I
\end{aligned}$$

Įrodyta.

13.6 Teiginys. *Jei ortogonalios matricos B tikrinės reikšmės yra realios, tai egzistuoja $\mathbf{R}^3$ bazė sudaryta iš matricos B tikrinių vektorių $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.*

Ortogonaliosios transformacijos matrica bazėje yra viena iš žemiau išvardintų

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \cos 0 & \sin 0 \\ & -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$ (transformacija nieko nekeičia)

$B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 0 & \sin 0 \\ 0 & -\sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$ (simetrija vektorių plokštumos v_2, v_3 plokštumos atžvilgiu)

$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & \sin\pi \\ 0 & -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$ (simetrija vektoriaus v_1 atžvilgiu)

$B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & \sin\pi \\ 0 & -\sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$ (simetrija koordinačių pradžios atžvilgiu).

13.7 Tiesioginis uždavinys. Tegu ortogonaliosios transformacijos matricos B tikrinės reikšmės yra $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a + ib, \lambda_3 = a - ib$ ir kompleksinio skaičiaus $\lambda_2 = a + ib$ trigonometrinė forma yra $\lambda_2 = a + ib = \cos\varphi + i \sin\varphi$. Tegu tikrinės reikšmės λ_1 tikrinis vektorius yra $\mathbf{v}_1$, tikrinės reikšmės λ_2 tikrinis vektorius yra $\mathbf{u}_2 - \mathbf{i}\mathbf{v}_2$.Tada tikrinės reikšmės λ_3 tikrinis vektorius $\mathbf{u}_2 - \mathbf{i}\mathbf{v}_2$. Normuokime šiuos vektorius: $\dfrac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \mathbf{v}'_1$, $\dfrac{\mathbf{u}_2 + \mathbf{i}\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \dfrac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} + \mathbf{i}\dfrac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \mathbf{u}'_2 + \mathbf{i}\mathbf{v}'_2$,

$\dfrac{\mathbf{u}_2 - \mathbf{i}\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \dfrac{\mathbf{u}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} - \mathbf{i}\dfrac{\mathbf{v}_2}{\sqrt{\|\mathbf{u}_2\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \mathbf{u}'_2 - \mathbf{i}\mathbf{v}'_2$.

Tada realūs vektoriai $\mathbf{v}'_1, \sqrt{2}\mathbf{u}'_2, \sqrt{2}\mathbf{v}'_2$ yra ortonomuota $\mathbf{R}^3$ bazė, kurioje transformacijos C matrica yra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Tokiu būdu ši ortogonalioji transformacija pasuka erdvę $\mathbf{R}^3$ kampu $(-\varphi)$ vektoriaus v_1 kryptimi.

Jeigu realioji ortogonaliosios transformacijos matricos C tikrinė reikšmė yra $\lambda_1 = -1$, tai bazėje $\mathbf{v}'_1, \sqrt{2}\mathbf{u}'_2, \sqrt{2}\mathbf{v}'_2$ transformacijos matrica yra

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ši transformacija atlieka šiuos du veiksmus:
1) simetrija vektorių $\sqrt{2}\mathbf{u}'_2, \sqrt{2}\mathbf{v}'_2$ plokštumos atžvilgiu
2) posūkis kampu $(-\varphi)$ vektoriaus $\mathbf{v}_1$ kryptimi.

13.8 Atvirkštinis uždavinys. Rasime matricą, kurios transformacija pasuka erdvę $\mathbf{R}^3$ kampu (φ) vektoriaus $\mathbf{u} = (a, b, c)$ kryptimi. Turėtume atlikti šiuos veiksmus:

1. Raskime vektoriui $\mathbf{u}$ statmeną vektorių $\mathbf{v}$ ir apskaičiuokime $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.
2. Ortonormuokime šią sistemą: $\mathbf{u}' = \dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \mathbf{v}' = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}, \mathbf{w}' = \dfrac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$.
3. Sudarykime ortogonaliąją matricą: $C = \left(\mathbf{u}'^T |\ \mathbf{v}'^T |\ \mathbf{w}'^T\right)$.

4. Suskaičiuokime matricą: $B = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ 0 & -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} C^T$.
Transformacija, kurios matrica yra B ir yra ieškoma matrica.

13.9 Ortogonaliosios matricos pavyzdys.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Charakteristinis polinomas: $x^3 - \left(\sqrt{3}+1\right)x^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)x - 1 = (x-1)\left(x^2 - x\sqrt{3} + 1\right)$
Tikrinės reikšmės: $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, 1$
Tikrinis vektorius atitinkantis 1 yra $(1,1,0) = v_1$
Tikrinis vektorius atitinkantis $\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$ yra $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}i, 1\right) = (0,0,1) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = u_2 + iv_2$
Tikrinis vektorius atitinkantis $\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ yra $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}i, 1\right) = (0,0,1) - i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = u_2 - iv_2$
Normuokime tikrinius vektorius ir atskirkime realius vektorius :
$v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,; u_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1)\,; v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
Normuokime realius vektorius:
$v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,; \sqrt{2}u_2' = (0,0,1)\,; \sqrt{2}v_2' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.
Šioje bazėje transformacijos matrica yra

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}.$$

Ši tiesinė transformacija suka erdvę -30° laipsnių kampu vektoriaus $v_1 = (1,1,0)$ kryptimi.

13.10 Pavyzdys. Pasuksime vektorių $(1;0;0)$ kampu 90° apie vektorių $\mathbf{u} = (0;1;1)$.

Rasime transformacijos, kuri erdvę pasuka kampu 90° apie vektorių $\mathbf{u} = (0;1;1)$, matricą.

Vektorių $\mathbf{u}$ papildome iki orogonaliosios sistemos:

$$\mathbf{u} = (0;1;1), \mathbf{v} = (1;0;0),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = j - k = (0;1;-1).$$

Normavus šią sistemą gausime ortonormuotą erdvės bazę:

$$\mathbf{u}' = \frac{\sqrt{2}}{2}(0;1;1), \mathbf{v}' = (1;0;0), \mathbf{w}' = \frac{\sqrt{2}}{2}(0;1;-1).$$

Bazių keitimo matrica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

ir ieškomoji matrica yra

$$A = C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) \\ 0 & -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} C^T =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) \\ 0 & -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

dabar pasukę vektorių $(1;0;0)$ kampu 90° apie vektorių $\mathbf{u} = (0;1;1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

gausime vektorių $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.