13 paskaita. *Tiesinės transformacijos plokštumoje ir erdvėje.*

Tiesinės transformacijos plokštumoje.

13.1 Apibrėžmas. *Funkcija T Dekarto plokštumos R^2 vektoriui (x, y) lygybėmis*

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y \\ v &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad (1)$$

priskirianti vektorių (u, v), $T(x, y) = (u, v)$, vadinama tiesine transformacija.

Tiesinę transformaciją T apibrėžiančias lygybes (1) galima reikšti ir matricomis

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – tiesinės transformacijos T matrica.

Norėdami pabrėžti ryšį tarp transformacijos T ir jos matricos transformacijos matricą žymi $[T]$.

13.2 Pavyzdžiai. 1. Transformacija T_0, apibrėžta lygybe

$$[T_0] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix},$$

vadinama *nuline transformacija.*

2. Transformacija T_I, apibrėžta lygybe

$$[T_I] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

vadinama *vienetine transformacija.*

Pateiksime kitus svarbius tiesinių transformacijų Dekarto plokštumoje pavyzdžius.

Tiesinis ištempimas ir tiesinis suspaudimas.

13.3 Apibrėžimas. *Tegu k - neneigiamas skaičius. Tada transformacija $T_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (kx, ky)$vadinama ištempimu, jei $k \geq 1$, ir suspaudimu, jei $0 \leq k \leq 1$.*

Tiesinio ištempimo, suspaudimo plokštumoje matrica yra

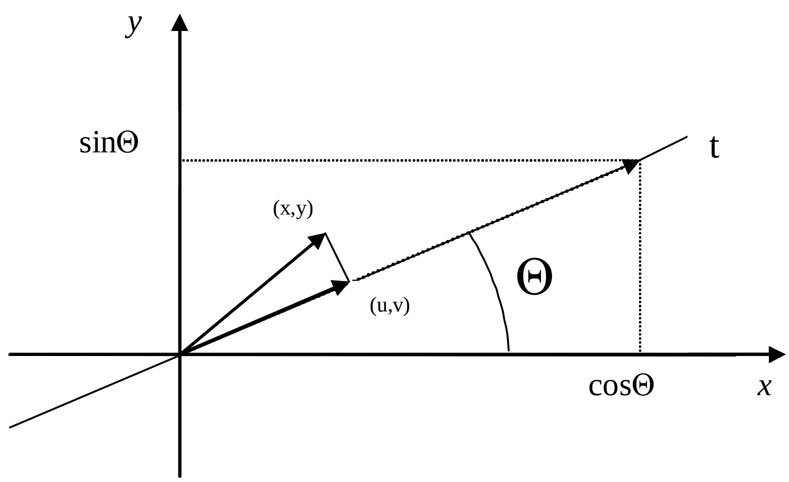
$$[T_k] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$[T_k] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Ortogonaliosios projekcijos transformacija plokštumoje

13.4 Apibrėžimas. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti to vektoriaus ortogonaliąją projekciją kurioje nors tiesėje, einančioje per koordinačių pradžią.*

Tegu vektorius (u, v) yra vektoriaus (x, y) projekcija *vienetiniame* tiesės t krypties vektoriuje $(\cos\Theta, \sin\Theta)$:



Tada T$(x, y) = (u, v)$ yra ortogonalioji transformacija tiesės t atžvilgiu ir

$$\begin{gathered} (u,v) = \mathrm{proj}_{(\cos\Theta,\sin\Theta)}\,(x,y) = \\ \frac{(x,y)\cdot(\cos\Theta,\sin\Theta)}{\|(\cos\Theta,\sin\Theta)\|}\frac{(\cos\Theta,\sin\Theta)}{\|(\cos\Theta,\sin\Theta)\|} = \\ (x\cos\Theta + y\sin\Theta)\,(\cos\Theta,\sin\Theta) = \\ \left(x\cos^2\Theta + y\sin\Theta\cos\Theta, x\cos\Theta\sin\Theta + y\sin^2\Theta\right). \end{gathered}$$

Tada

$$u = x\cos^2\Theta + y\sin\Theta\cos\Theta$$
$$v = x\cos\Theta\sin\Theta + y\sin^2\Theta$$

arba

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\Theta & \sin\Theta\cos\Theta \\ \sin\Theta\cos\Theta & \sin^2\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

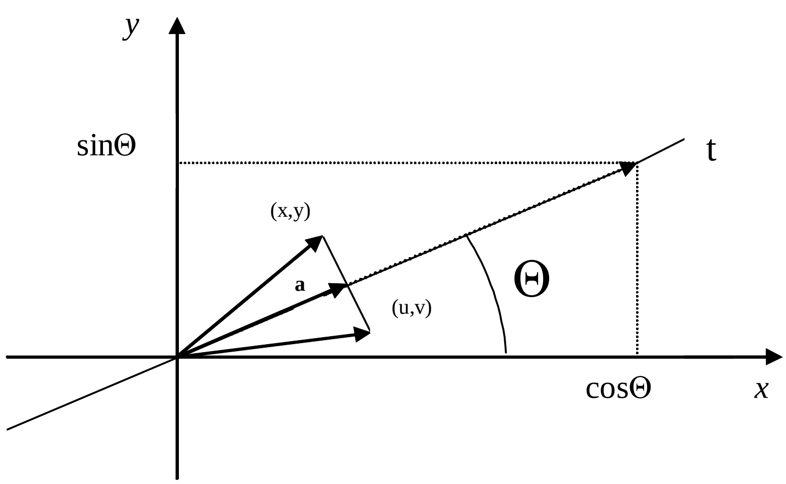
Štai ortogonalių projekcijų transformacijos plokštumoje kai kurių tiesių atžvilgiu

$\underline{Transformacija}$	$\underline{Lygtys}$	$\underline{Matrica}$	$\underline{Formulė}$	$\underline{Kampas\ \Theta}$
Projekcija į x- ašį	$u = x$, $v = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	0°
Projekcija į y- ašį	$u = 0$, $v = y$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	90°

Atspindžio transformacija plokštumoje

13.5 Apibrėžimas. *Atspindžio transformacija plokštumoje yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti vektorių simetrišką kurios nors tiesės, einančios per koordinačių pradžią, atžvilgiu.*

Tegu tiesė t sudaro su Ox ašimi Θ kampą, o T - atspindžio transformacija tiesės t atžvilgiu:$T(x, y) = (u, v)$ .Rasime atspindžio transformacijos T matricą.



Tegu vektorius $\mathbf{a}$ yra vektoriaus (x, y) projekcija *vienetiniame* tiesės t krypties vektoriuje $(\cos\Theta, \sin\Theta)$:

$$\begin{gathered}
\mathbf{a} = \operatorname{proj}_{(\cos\Theta, \sin\Theta)}(x, y) = \\
\frac{(x, y) \cdot (\cos\Theta, \sin\Theta)}{\|(\cos\Theta, \sin\Theta)\|} \frac{(\cos\Theta, \sin\Theta)}{\|(\cos\Theta, \sin\Theta)\|} = \\
(x\cos\Theta + y\sin\Theta)(\cos\Theta, \sin\Theta) = \\
\left(x\cos^2\Theta + y\sin\Theta\cos\Theta, x\cos\Theta\sin\Theta + y\sin^2\Theta\right)
\end{gathered}$$

Tada

$$\begin{gathered}
(x, y) - \mathbf{a} = \mathbf{a} - (u, v) \\
(u, v) = 2\mathbf{a} - (x, y)
\end{gathered}$$

ir

$$\begin{gathered}
u = 2x\cos^2\Theta + 2y\sin\Theta\cos\Theta - x = x\left(2\cos^2\Theta - 1\right) + y\left(2\sin\Theta\cos\Theta\right) = \\
x\cos 2\Theta + y\sin 2\Theta \\
v = 2x\cos\Theta\sin\Theta + 2y\sin^2\Theta - y = x\left(2\sin\Theta\cos\Theta\right) + y\left(2\sin^2\Theta - 1\right) = \\
x\sin 2\Theta - y\cos 2\Theta \\
u = x\cos 2\Theta + y\sin 2\Theta \\
v = x\sin 2\Theta - y\cos 2\Theta
\end{gathered}$$

arba

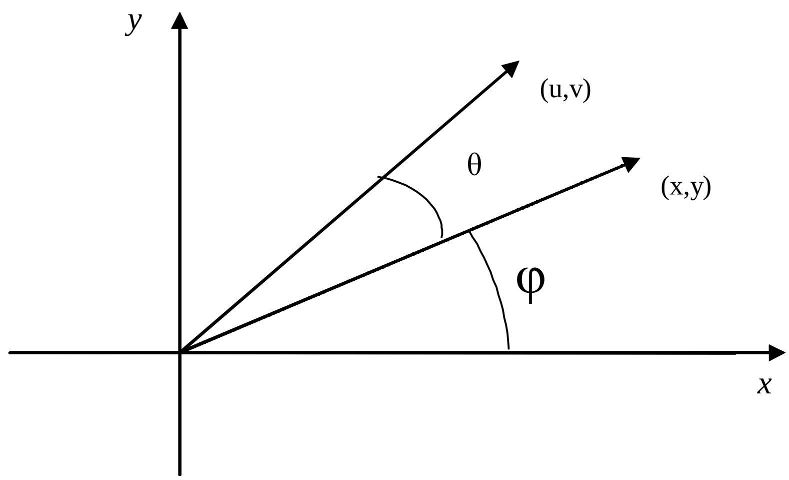
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\Theta & \sin 2\Theta \\ \sin 2\Theta & -\cos 2\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Štai atspindžio transformacijos plokštumoje kai kurių tiesių atžvilgiu

Transformacija	*Lygtys*	*Matrica*	*Formulė*	*Kampas* Θ
Atspindys y- ašies atžvilgiu	$u = -x$ $v = y$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	90°
Atspindys x- ašies atžvilgiu	$u = x$ $v = -y$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	0°
Atspindys $y = x$ atžvilgiu	$u = y$ $v = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	45°

Posūkio transformacijos plokštumoje

13.6 Apibrėžimas. *Posūkio transformacija kampu θ xy - pokštumoje vadiname tiesinę transformaciją T^{θ}, kuri kiekvieną vektorių xy - plokštumoje pasuka prieš laikrodžio rodyklę kampu θ.*



Rasime posūkio transformacijos T^{θ} matrica.
Tegu $T^{\theta}(x,y)=(u,v)$ ir $r=\sqrt{x^2+y^2}$ - vektorių (x,y) ir (u,v) ilgis. Turime

$$(x,y)=r\cos\varphi\mathbf{i}+r\sin\varphi\mathbf{j},$$
$$(u,v)=r\cos(\theta+\varphi)\,\mathbf{i}+r\sin(\theta+\varphi)\,\mathbf{j}$$

ir

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi$$
$$u=r\cos(\theta+\varphi)=r\cos\theta\cos\varphi-r\sin\theta\sin\varphi=x\cos\theta-y\sin\theta$$
$$v=r\sin(\theta+\varphi)=r\sin\theta\cos\varphi+r\cos\theta\sin\varphi=x\sin\theta+y\cos\theta$$
$$u=x\cos\theta-y\sin\theta$$
$$v=x\sin\theta+y\cos\theta$$

Tada

$$\left[T^{\theta}\right]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

ir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Pastebėkime, kad posūkio transformacijos matrica $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ esame apibrėžę kompleksinį skaičių $\cos\theta + i\sin\theta$. Tada ir pačią posūkio transformaciją plokštumoje galime reikšti kompleksinių skaičių sandauga:

$$u + iv = (x + iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta),$$

o jeigu komplekcinio skaičiaus $u+iv$ trigonomerinė forma yra $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tai

$$u + iv = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta) = r((\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta))).$$

Tiesinės transformacijos erdvėje.

13.7 Apibrėžmas. *Funkcija T erdvės R^3 vektoriui (x, y, z) lygybėmis*

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned}$$

priskirianti vektorių (u, v, w), $T(x, y, z) = (u, v, w)$, vadinama tiesine transformacija.

Tiesinę transformaciją T apibrėžiančias lygybes (1) galima reikšti ir matricomis

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – tiesinės transformacijos T matrica.

13.8 Pavyzdžiai. 1. Transformacija T_0, apibrėžta lygybe

$$[T_0]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vadinama *nuline transformacija.*
2. Transformacija T_I, apibrėžta lygybe

$$[T_I]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

vadinama *vienetine transformacija.*

Pateiksime kitus svarbius tiesinių transformacijų erdvėje pavyzdžius.

Tiesinis ištempimas ir tiesinis suspaudimas. erdvėje

13.9 Apibrėžimas. *Tegu k - neneigiamas skaičius. Tada transformacija $T_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (kx, ky)$vadinama ištempimu, jei $k \geq 1$, ir suspaudimu, jei $0 \leq k \leq 1$.*

Tiesinio ištempimo, suspaudimo plokštumoje matrica yra

$$[T_k] = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

$$[T_k]\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

13.10 Apibrėžimas. *Ortogonaliosios projekcijos transformacija yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti to vektoriaus ortogonaliąją projekciją kurioje nors plokštumoje, einančioje per koordinačių pradžią.*

Ortogonaliosios projekcijos erdvėje koordinatinių plokštumų atžvilgiu:

$\underline{Transformacija}$	$\underline{Lygtys}$	$\underline{Matrica}$	$\underline{Formulė}$
Projekcija į xy- plokštuma	$u = x$ $v = y$ $w = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Projekcija į xz- plokštuma	$u = x$ $v = 0$ $w = z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Projekcija į yz- plokštuma	$u = 0$ $v = y$ $w = z$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Atspindžio transformacija erdvėje.

13.11 Apibrėžimas. *Atspindžio transformacija erdvėje yra tiesinė transformacija kiekvienam vektoriui priskirianti vektorių simetrišką kurios nors plokštumos, einančios per koordinačių pradžią, atžvilgiu.*

$\underline{Transformacija}$	$\underline{Lygtys}$	$\underline{Matrica}$	$\underline{Formulė}$
Atspindys xy- plokštumos atžvilgiu	$u = x$ $v = y$ $w = -z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Atspindys xz- plokštumos atžvilgiu	$u = x$ $v = -y$ $w = z$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
Atspindys yz- plokštumos atžvilgiu	$u = -x$ $v = y$ $w = z$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Posūkio transformacijos erdvėje

13.12 Apibrėžimas. *Tegu $l-$ tiesė erdvėje, einanti per koordinačių pradžia, ir* $\mathbf{u}-$ tiesės l krypties *vektorius. Teigiama tiesės posūkio kryptimi(vektoriaus*

u atžvilgiu) *vadinsime kryptį, gaunama sukant dešinę ranka, nykščiu nukreipta vektoriaus* **u** *kryptimi, sulenktų pirštų link (dešinės rankos taisyklė). Posūkiu erdvėje kampu θ vadiname tiesinę transformacija T^{θ}, kuri kiekvieną vektorių pasuka teigiama duotos tiesės posūkio kryptimi kampu θ.*

Posūkio transformacijos koordinatinių apie koordinatines ašis:

Transformacija	*Lygtys*	*Matrica*
Posūkis apie x- ašį kampu θ	$u = x$ $v = y\cos\theta - z\sin\theta$ $w = y\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Posūkis apie y- ašį kampu θ	$u = x\cos\theta + z\sin\theta$ $v = 1$ $w = -x\sin\theta + z\cos\theta$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$
Posūkis apie z- ašį kampu θ	$u = x\cos\theta - y\sin\theta$ $v = x\sin\theta + y\cos\theta$ $w = z$.	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tiesinių transformacijų sandauga.

13.13 Apibrėžimas. *Tegu T_A ir T_B - dvi transformacijos arba Dekarto plokštumoje R^2 arba erdvėje R^3. Tada T_A* ir *T_B* kompozicija *$T_B \circ T_A$ apibrěžta formule*

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{a}) = T_B(T_A(\mathbf{a})), \text{čia } a \in R^2 \text{ arba } \mathbf{a} \in R^3.$$

vadinama tiesinių transformacijų sandauga $T_B\ T_A$.

Transformacija $T_B T_A$ yra tiesinė, nes ji apibržiama kvadratine matrica BA :

$$(T_B T_A)(\mathbf{a}) = (T_B \circ T_A)(\mathbf{a}) = T_B(T_A(\mathbf{a})) = B(A\mathbf{a}) = (BA)\mathbf{a}.$$

Taigi turime, kad

$$T_B T_A = T_{BA}.$$

13.14 Pavyzdys. $T^{\theta_2}T^{\theta_1} = T^{\theta_2+\theta_1}$.
Parodysime, kad šių transformacijų matricos sutampa:

$$\begin{aligned}\left[T^{\theta_2} \circ T^{\theta_1}\right] = \left[T^{\theta_2}\right] \cdot \left[T^{\theta_1}\right] &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} \\ &= \left[T^{\theta_2+\theta_1}\right].\end{aligned}$$

Tiesinių transformacijų sandaugoje yra svarbi dauginamųjų tvarka: ne visada transformacija T_BT_A yra lygi transformacijai T_AT_B. Pavyzdžiui, jei T_A atspindžio transformacija Dekarto plokštumoje tiesės $y = x$ atžvilgiu, o T_B - ortogonalioji projekcija į x -ašį, tai

$$\begin{aligned}[T_BT_A] = [T_B]\,[T_A] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [T_AT_B] = [T_A]\,[T_B] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Taigi, šiuo atveju $T_B \circ T_A \neq T_A \circ T_B$.