

12 paskaita. Tiesinės transformacijos \mathbf{R}^3 ir jų matricos.

Tegu A yra tiesinės transformacijos $\mathcal{A} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ matrica kurioje nors bazėje, o I - vienetinė matrica iš $M_3(\mathbf{R})$.

12.1 Apibrėžimai.

1. Polinomas $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tI)$ vadinamas tiesinės transformacijos \mathcal{A} charakteringuoju polinomu.

2. $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ šaknys (realios ir kompleksinės) vadinamos tikrinėmis \mathcal{A} reikšmėmis.

3. Jei λ - realioji tikrinė reikšmė, tai nenulinis vektorius \mathbf{v} , tenkinantis lygybę $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ vadinamas tikriniu vektoriumi atitinkančiu tikrinę reikšmę λ .

12.2 Teorema. Tiesinės transformacijos \mathcal{A} charakteringasis polinomas nepriklauso nuo bazės.

Įrodymas. Tegu A_1 ir A_2 yra tiesinės transformacijos \mathcal{A} matricos skirtingose bazėse. Turime $A_1 = C^{-1}A_2C$, čia C - bazių keitimo matrica. Tada

$$\begin{aligned} \det(A_1 - tI) &= \\ \det(C^{-1}A_2C - tI) &= \det(C^{-1}A_2C - tC^{-1}IC) = \\ \det(C^{-1}(A_2 - tI)C) &= \det C^{-1} \det(A_2 - tI) \det C = \\ &= \det(A_2 - tI). \end{aligned}$$

Įrodyta.

12.3 Teorema. Jei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ tikriniai vektoriai atitinkantys poromis skirtingas reikšmes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, tai vektorių sistema $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ yra tiesiškai nepriklausoma.

Įrodymas. Matematinė indukcija pagal m .

M.i. bazė ($m = 1$). tikrinis vektorius \mathbf{v}_1 yra nenulinis, todėl tiesiškai nepriklausomas.

M.i. prielaida. vektoriai $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$ yra tiesiškai nepriklausomi.

M.i. teiginys.

Tegu $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tokie skaičiai, kad

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_m\mathbf{v}_m = \mathbf{o}. \quad (1)$$

Tada

$$\begin{aligned} \mathbf{o} = \mathcal{A}(\mathbf{o}) &= \mathcal{A}(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \mathbf{v}_m) = \\ &= \alpha_1 \mathcal{A}(\mathbf{v}_1) + \cdots + \alpha_m \mathcal{A}(\mathbf{v}_m) = \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{o} \quad (2) \end{aligned}$$

Padauginkime (1) iš λ_m ir atimkime ją iš (2). Turėsime

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\mathbf{v}_{m-1} = \mathbf{o}$$

pagal M.i. prielaidą $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$ yra tiesiškai neprikalūsomi, todėl

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) = \cdots = \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0.$$

Bet $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ yra poromis skirtingi, todėl

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$$

ir

$$\alpha_m \mathbf{v}_m = \mathbf{o}.$$

Vektorius $\mathbf{v}_m \neq \mathbf{o}$, todėl ir $\alpha_m = 0$.

Įrodyta.

Lygybė $\mathcal{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ yra ekvivalenti lygybei $(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, čia \mathcal{I} - vienetinė transformacija: $\mathcal{I}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Todėl visų tikrinių vektorių atitinkančių tikrinę reikšmę λ aibė yra poervis $\ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})$.

Tiesinės transformacijos matricos.

Tegu A yra tiesinės transformacijos \mathcal{A} standartinėje bazėje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) A.$$

$$\text{Tegu } \chi_{\mathcal{A}}(t) = \det(A - tI) = -(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3)$$

Turime, kad $\dim \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 3 - \text{rank}(A - \lambda I)$.

Nagrinėsime šiuos atvejus.

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$

1.1.

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3. \\ &\dim \ker(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}) = 1 \\ &\dim \ker(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I}) = 1 \\ &\dim \ker(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I}) = 1 \end{aligned}$$

\mathbf{R}^3 bazė: tikriniai vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ atinkantys $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) &= \lambda_2 \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) &= \lambda_3 \mathbf{v}_3\end{aligned}$$

\mathcal{A} matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

1.2

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ \dimker(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}) &= 2 \\ \dimker(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I}) &= 1\end{aligned}$$

\mathbf{R}^3 bazė: tikriniai vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ atinkantys $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) &= \lambda_1 \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) &= \lambda_3 \mathbf{v}_3\end{aligned}$$

\mathcal{A} matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

1.3

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 \neq \lambda_3 \\ \dimker(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I}) &= 1 \\ \dimker(\mathcal{A} - \lambda_3 \mathcal{I}) &= 1\end{aligned}$$

Tegu $\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T$ yra lygčių sistemos $(A - \lambda_1 I)^2 X = O$ fundamentalioji sprendinių sistema.

Tarp $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1^T, (A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_2^T$ yra nenulinis stulpelis, sakykime $(A - \lambda_1 I)\mathbf{u}_1^T \neq (0, 0, 0)^T$.

\mathbf{R}^3 bazė: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 = (A - \lambda \mathcal{I})(\mathbf{u}_1), \mathbf{v}_3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) &= \lambda_1 \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) &= \lambda_3 \mathbf{v}_3\end{aligned}$$

\mathcal{A} matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

1.4.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \\ \dim \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) &= 3\end{aligned}$$

\mathbf{R}^3 bazė: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) &= \lambda \mathbf{e}_1 \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) &= \lambda \mathbf{e}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_3) &= \lambda \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

\mathcal{A} matrica bazėje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.5

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \\ \dim \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) &= 2\end{aligned}$$

Tarp vektorių $(A - \lambda I)\mathbf{e}_1^T, (A - \lambda I)\mathbf{e}_2^T, (A - \lambda I)\mathbf{e}_3^T$ yra nenulinis, sakykime $(A - \lambda I)\mathbf{e}_1^T \neq (0, 0, 0)^T$

\mathbf{R}^3 bazė: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})(\mathbf{e}_1), \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) &= \lambda_1 \mathbf{v}_2 \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) &= \lambda_3 \mathbf{v}_3\end{aligned}$$

\mathcal{A} matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1.6

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$

$$\dim \ker(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I}) = 1$$

Tarp vektorių $(A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_1^T, (A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_2^T, (\lambda A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_3^T$ yra nenulinis, sakykime $(A - \lambda I)^2 \mathbf{e}_1^T \neq (0, 0, 0)^T$

\mathbf{R}^3 bazė: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})(\mathbf{e}_1), \mathbf{v}_3 = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^2(\mathbf{e}_1)$

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = \lambda \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = \lambda \mathbf{v}_3$$

\mathcal{A} matrica bazėje $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

2. $\lambda_1 \in \mathbf{R}, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{C}$.

Turime, kad

$$\lambda_2 = a + ib, \lambda_3 = a - ib.$$

Tegu \mathbf{v}_1 yra tikrinis vektorius, atinkantis λ_1

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) = \lambda_1 \mathbf{v}_1$$

Tegu nenulinis kompleksinis vektorius $\mathbf{c}_2 \in \mathbf{C}^3$ yra toks, kad

$$(A - \lambda_2 I) \mathbf{c}_2^T = (0, 0, 0)^T$$

ir

nenulinis kompleksinis vektorius $\mathbf{c}_3 \in \mathbf{C}^3$ yra toks, kad

$$(A - \lambda_3 I)\mathbf{c}_3^T = (0, 0, 0)^T.$$

Tada $\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2 + i\mathbf{v}_3$ ir $\mathbf{c}_3 = \mathbf{v}_2 - i\mathbf{v}_3$, čia $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{R}^3$ ir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) + i\mathcal{A}(\mathbf{v}_3) &= \mathcal{A}(\mathbf{v}_2 + i\mathbf{v}_3) = \\ (a + ib)(\mathbf{v}_2 + i\mathbf{v}_3) &= (a\mathbf{v}_2 - b\mathbf{v}_3) + i(b\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3) \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{v}_2 - b\mathbf{v}_3 &= (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}(\mathbf{v}_3) = b\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3 &= (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sudaro \mathbf{R}^3 bazę, kurioje \mathcal{A} matrica yra

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$