Algebra ir geometrija informatikams. Paskaitų konspektas.

Rimantas Grigutis

12 paskaita. Tiesė erdvėje.

Tiesę erdvėje galima apibrėžti kaip dviejų susikertančių plokštumų susikirtimo bendrų taškų aibę.

12.1 Apibrėžimas. *Dviejų tiesinių lygčių sistema:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} . \qquad (1)$$

vadinama tiesės bendrąja lygtimi erdvėje.

Tegu $A_0(x_0; y_0; z_0)$ – fiksuotas tiesės T taškas, o $A(x; y; z)$ - bet kuris tiesės T taškas, ir $\mathbf{v} = (k; l; m)$ - nenulinis vektorius lygiagretus tiesei T. Tada vektoriai $\overrightarrow{A_0A} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k; l; m)$ yra kolinearūs:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Ši dviguba lygybė yra teisinga su visais tiesės taškais $A(x; y; z)$ ir todėl ji yra tiesės T lygtimi: tai ir yra *kanoninė tiesės T lygtis,* o vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ vadinamas tiesės T *krypties vektoriumi.*

Vektorių $\overrightarrow{A_0A} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ kolinearumą galėtume užrašyti ir taip:

$$\overrightarrow{A_0A} = t\mathbf{v}.$$

Jeigu O yra koordinčių sistemos pradžios taškas($O = (0; 0; 0)$), tai $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$ ir

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_0} + t\mathbf{v}.$$

Ši lygtis vadinama *vektorine tiesės lygtimi.* Tai galima užrašyti ir taip:

$$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t(k; l; m)$$

ir

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + tk \\
y &= y_0 + tl \\
z &= z_0 + tm
\end{aligned}
$$

Tai *parametrinės tiesės T lygtys.*

Kaip iš bendrosios tiesės lygties rasti kanoninę tiesės lygtį?

Tegu (1) yra bendroji tiesės T lygtis. Tiesės T krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ tai bet kuris vektorius *lygiagretus* abiems plokštumoms: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, t.y. vektorius $\mathbf{v}$ yra statmenas abiems plokštumų normalės vektoriams $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Taigi vektoriumi $\mathbf{v}$ galėtų būti vektorius

$$
\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).
$$

Norint rasti kurį nors vieną tiesės tašką A_0, reiktų paimti kurį nors sistemos (1) sprendinį (x_0, y_0, z_0).

Tiesių padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu.

Tegu $\mathbf{v} = (k, l, m)$ - tiesės T krypties vektorius.
1. $k = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow T$ lygiagreti yz plokštumai
2. $l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow T$ lygiagreti xz plokštumai
3. $m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow T$ lygiagreti xy plokštumai
4. $k = l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{k} \Leftrightarrow T$ lygiagreti Oz ašiai
5. $l = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{i} \Leftrightarrow T$ lygiagreti Ox ašiai
6. $k = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{j} \Leftrightarrow T$ lygiagreti Oy ašiai.

12.2 Teorema(dviejų tiesių padėtis erdvėje). *Tegu duotos dvi tiesės:*

$$
\begin{aligned}
T_1 &: \frac{x - x_1}{k_1} = \frac{y - y_1}{l_1} = \frac{z - z_1}{m_1} \\
T_2 &: \frac{x - x_2}{k_2} = \frac{y - y_2}{l_2} = \frac{z - z_2}{m_2}.
\end{aligned}
$$

Tada
1) tiesės T_1 ir T_2 lygiagrečios $\Longleftrightarrow \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$.

2) tiesės T_1 ir T_2 statmenos $\Longleftrightarrow k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0.$
3) kampas φ tarp tiesių T_1 ir T_2 randamas iš lygties

$$\cos\varphi = \frac{k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{k_1+l_1+m_1}\sqrt{k_2+l_2+m_2}}\ .$$

4) tiesės T_1 ir T_2 yra prasilenkiančios $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

5) tiesės T_1 ir T_2 priklauso vienai plokštumai $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Įrodymas.
1)

$$\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ lygiagrečios} \Longleftrightarrow$$
$$\text{krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ lygiagretūs} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

2)

$$\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ statmenos} \Longleftrightarrow$$
$$\text{krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ statmeni}$$
$$\Longleftrightarrow k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0.$$

3) kampas φ tarp tiesių T_1 ir T_2 tai kampas tarp krypties vektorių $\mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)$ ir $\mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2)$, todėl

$$\cos\varphi = \frac{k_1k_2+l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{k_1+l_1+m_1}\sqrt{k_2+l_2+m_2}}.$$

4)

$$\begin{gathered}\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ yra prasilenkiančios} \Longleftrightarrow \\ \text{vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir } \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \textit{nėra komplanarūs} \\ \Longleftrightarrow \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \neq 0.\end{gathered}$$

5)

$$\begin{gathered}\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ priklauso vienai plokštumai} \Longleftrightarrow \\ \text{vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)\ ,\ \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir } \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \textit{komplanarūs} \Longleftrightarrow \\ \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = 0.\end{gathered}$$

Įrodyta. ■

12.3 Teorema(tiesės ir plokštumos padėtis erdvėje). *Tegu duota tiesė* T :

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$$

ir plokštuma P :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

1) tiesė T *lygiagreti plokštumai* P $\Longleftrightarrow ak + bl + cm = 0$

2) tiesė T *statmena plokštumai* P $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{k} = \dfrac{b}{l} = \dfrac{c}{m}.$

Įrodymas. Tiesė T lygiagreti plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės T krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ *statmenas* plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n} = (a, b, c)$:

$$ak + bl + cm = 0$$

Tiesė T statmena plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės T krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ *lygiagretus* plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n} = (a, b, c)$:

$$\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m}.$$

Įrodyta. ■

Taško atstumas iki tiesės.

Tegu A ir $B-$ du skirtingi tiesės T taškai, o $P-$ bet kuris tiesės T taškas. Tada vektoriai $\overrightarrow{AP}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearūs:

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}.$$

12.4 Teorema(taško atstumas iki tiesės). *Tegu* C *yra erdvės taškas, o* A ir $B-$ du skirtingi tiesės T taškai. *Egzistuoja vienintėlis toks tiesės* T *taškas* P(jis vadinamas C projekcija tiesėje T), *kad vektorius* $\overrightarrow{CP}$ *yra statmenas vektoriui* $\overrightarrow{AB}$ *ir*

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \qquad t = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2},$$

taško C *atstumas iki tiesės* T *lygus*

$$CP = \frac{\sqrt{AC^2 \cdot AB^2 - \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\right)^2}}{AB}.$$

Įrodymas. Vektorius $\overrightarrow{CP}$ turi būti statmenas vektoriui $\overrightarrow{AB}$. Tada

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
\left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
\left(t\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
t\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
t = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}.
\end{gathered}$$

Vektoriai $\overrightarrow{CP}$ ir $\overrightarrow{AP}$ yra statmeni, todėl iš Pitagoro teoremos trikampiui PAC (kampas prie viršūnės $P-$ status) turime:

$$
\begin{gathered}
CP^2 = AC^2 - AP^2 = \\
AC^2 - \left\| t\overrightarrow{AB} \right\|^2 = \\
AC^2 - t^2 AB^2 = \\
AC^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\| AB \right\|^2} \right)^2 AB^2 = \\
\frac{AC^2 \cdot AB^2 - \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \right)^2}{AB^2}.
\end{gathered}
$$

Įrodyta. ■