

11 paskaita. Tiesinės transformacijos \mathbf{R}^n .

11.1 Apibrėžimas. Funkcija $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ vadinama tiesine transformacija, jeigu

1. $\mathcal{A}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{u}_1) + \mathcal{A}(\mathbf{u}_2)$ su visais $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{R}^n$.
2. $\mathcal{A}(\alpha \mathbf{u}) = \alpha \mathcal{A}(\mathbf{u})$ su visais $\alpha \in \mathbf{R}$ ir $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$.

11.2 Pavyzdžiai.

1. Funkcija $T_k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$ yra tiesinė transformacija erdvėje \mathbf{R}^3 ir vadinama *ištempimu*.
2. Vektoriaus iš \mathbf{R}^2 projekcija į x ašį: $T_{ox}(x, y) = (x, 0)$ yra tiesinė transformacija erdvėje \mathbf{R}^2 ir vadinama *ortogonalia projekcija*.
3. Simetrija xy plokštumos atžvilgiu erdvėje \mathbf{R}^3 : $T_{xy}(x, y, z) = (x, y, -z)$ yra tiesinė transformacija erdvėje \mathbf{R}^3 ir vadinama *atspindžio* transformacija.

11.3 Apibrėžimas. Transformacijos $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ branduoliu vadinamas \mathbf{R}^n poerdvis

$$\ker \mathcal{A} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n \mid \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}.$$

Transformacijos $\mathcal{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ vaizdu vadinamas \mathbf{R}^n poerdvis

$$\operatorname{im} \mathcal{A} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n \mid \exists \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n : \mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}\}.$$

11.4 Pavyzdžiai.

1. $\ker T_k = \mathbf{o}$ ir $\operatorname{im} T_k = \mathbf{R}^3$.
2. $\ker T_{ox} = \{\mathbf{v} = (0, b) \mid b \in \mathbf{R}\}$ ir $\operatorname{im} T_{ox} = \{\mathbf{u} = (a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}$.
3. $\ker T_{xy} = \mathbf{o}$ ir $\operatorname{im} T_{xy} = \mathbf{R}^3$.

11.5. Teiginys. Tiesinė transformacija \mathcal{A} pasižymi tokiomis savybėmis:

1. $\mathcal{A}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$.
2. Jeigu $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ yra tiesiškai priklausoma vektorių sistema, tai ir $\mathcal{A}(\mathbf{u}_1), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{u}_n)$ yra tiesiškai priklausoma vektorių sistema.
3. Jeigu $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ yra generuojanti \mathbf{R}^n sistema, tai ir $\mathcal{A}(\mathbf{u}_1), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{u}_n)$ yra generuojanti $\operatorname{im} \mathcal{A}$ sistema.

Įrodyti paliekama skaitytojui.

11.6. Teorema. Jei U yra \mathbf{R}^n poerdvis, tai egzistuoja tokios \mathbf{R}^n transformacijos \mathcal{A} ir \mathcal{B} , kad $U = \ker \mathcal{A}$ ir $U = \text{im} \mathcal{B}$.

Įrodymas. Papildykime U bazę $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ iki visos erdvės \mathbf{R}^n bazės $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$. Tiesines transformacijas \mathcal{A}, \mathcal{B} apibrėžkime formulėmis

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k + a_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + a_n \mathbf{u}_n) &= a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k, \\ \mathcal{B}(a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_k \mathbf{u}_k + a_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + a_n \mathbf{u}_n) &= a_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} + \dots + a_n \mathbf{u}_n.\end{aligned}$$

Tada $\text{im} \mathcal{A} = U$ ir $\ker \mathcal{B} = U$.

Įrodyta.

Tiesinės transformacijos matrica.

Tegu \mathcal{A} - tiesinė transformacija erdvėje \mathbf{R}^n , o $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ \mathbf{R}^n bazė. Tada

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{u}_1) &= a_{11} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{n1} \mathbf{u}_n = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \mathcal{A}(\mathbf{u}_n) &= a_{1n} \mathbf{u}_1 + \dots + a_{nn} \mathbf{u}_n = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

vadinama *tiesinės transformacijos \mathcal{A} matrica* bazėje $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Turime

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) A.$$

Dabar parodysime ryšį tarp vektoriaus \mathbf{u} ir jo tiesinio vaizdo $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ koordinatų bazėje $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Tegu $\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$ ir

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Turime

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}) &= \mathcal{A} \left((\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \right) = \\ &= (\mathcal{A}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = ((\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) A) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \\ &= (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \left(A \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \right) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dabar parodysime kaip keičiasi tiesinės transformacijos matrica keičiantis erdvės bazėms.

Tegu $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ir $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n$ dvi erdvės \mathbf{R}^n bazės ir C yra šių bazių keitimo matrica:

$$(\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \cdot C$$

Jei

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_n) &= (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) A \\ \mathcal{A}(\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n) &= (\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n) A' \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) AC &= (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) CA' \\ AC &= CA' \\ A' &= C^{-1}AC. \end{aligned}$$

11.7. Teorema (apie tiesinės transformacijos bazės ir vaizdo bazes). Tegu tiesinės transformacijos \mathcal{A} matrica bazėje $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ yra A ir $\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_r^T$ (stulpeliai iš \mathbf{R}_n) yra homogeninės lygčių sistemos $AX = 0$ fundamentalioji sprendinių sistema. Tada

1) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ yra $\ker \mathcal{A}$ bazė ir $\dim \ker \mathcal{A} = n - r = n - \text{rank} A$.

2) Jei $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$ yra matricos A stulpeliai, tai $\text{im} \mathcal{A} = [\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_n^T]$ ir $\text{im} \mathcal{A}$ bazė yra maksimalus tiesiškai nepriklausomas sistemos $\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_n^T$ (eilutės) posistemis, o $\dim \text{im} \mathcal{A} = r = \text{rank} A$.

Irodymas. 1) Jei $\mathbf{u} = (a_1, \dots, a_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}^T$

, tai $\mathbf{u} \in \ker \mathcal{A}$ tada ir tik tada, kada $A\mathbf{u}^T = \mathbf{0}$, t.y. $\ker \mathcal{A}$ vektorių koordinatiniai stulpeliai yra homogeninės lygčių sistemos $AX = 0$ sprendiniai. Todėl šios sistemos fundamentalioji sprendinių sistema yra $\ker \mathcal{A}$ bazės koordinatiniais stulpeliais.

2) Turime, kad $\mathbf{s}_i^T = A\mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_i^T$. Todėl $\text{im} \mathcal{A}$ bazė yra maksimalus tiesiškai nepriklausomas sistemos $\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_n^T$ (eilutės) posistemis, o $\dim \text{im} \mathcal{A} = r = \text{rank} A$.

Irodyta.

11.8 Išvada. *Su visom erdvės \mathbf{R}^n tiesinėm transformacijom \mathcal{A} teisinga*

$$\dim \ker \mathcal{A} + \dim \text{im} \mathcal{A} = n.$$

Veiksmai su tiesiniais atvaizdžiais.

11.9 Apibrėžimai. Tegu \mathcal{A}, \mathcal{B} tiesinės transformacijos erdvėje \mathbf{R}^n .

\mathcal{A} ir \mathcal{B} suma yra tiesinė transformacija $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ apibrėžta lygybe:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{B}(\mathbf{u}).$$

Tiesinė transformacija $\alpha \mathcal{A}$ su visais $\alpha \in \mathbf{R}$ apibrėžta lygybe

$$(\alpha \mathcal{A})(\mathbf{u}) = \alpha (\mathcal{A}(\mathbf{u})).$$

\mathcal{A} ir \mathcal{B} sandauga yra tiesinė transformacija $\mathcal{A}\mathcal{B}$ apibrėžta lygybe

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathbf{u}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathbf{u})).$$

11.10 Teorema. Tegu \mathcal{A}, \mathcal{B} tiesinės transformacijos erdvėje \mathbf{R}^n , o A ir B yra jų matricos bazėje $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. Tada

- 1) $A + B$ yra transformacijos $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ matrica bazėje $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.
- 2) αA yra transformacijos $\alpha \mathcal{A}$ matrica bazėje $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.
- 3) AB yra transformacijos $\mathcal{A}\mathcal{B}$ matrica bazėje $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$.

Įrodymą paliekame skaitytojui.