Algebra ir geometrija informatikams. Paskaitų konspektas.

Rimantas Grigutis

11 paskaita. *Plokštuma erdvėje.*

Pirmosios teoremos kalba apie plokštumos erdvėje bendrąją lygtį.

11.1 Teorema(tiesioginė). *Jei P yra plokštuma erdvėje, tai egzistuoja tokie skaičiai a, b, c, d , kad $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, kad lygybė $ax + by + cz + d = 0$ yra P lygtis.*

11.2 Teorema(atvirkštinė). *Jei a,b,c,d yra tokie skaičiai, kad $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, tai egzistuoja plokštuma P, kurios lygtis yra $ax + by + cz + d = 0$.*

11.1 teoremos įrodymas. Tegu $A_0\,(x_0; y_0; z_0)$ – plokštumos P taškas, o $\mathbf{n} = (a; b; c)$ - vektorius, statmenas plokštumai P. Čia $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, nes vektorius $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. Jei $A\,(x, y, z)$ – bet kuris plokštumos P taškas, tai vektoriai $\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ ir $\mathbf{n}$ yra statmeni, todėl

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{\mathbf{A}_0\mathbf{A}}=0$$

arba visi plokštumos P taškai ir tik jie tenkina lygtį:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0.$$
$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

Gavome, kad plokštumos P lygtis yra

$$ax + by + cz + d = 0,$$

čia $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.
Įrodyta. ■

11.2 teoremos įrodymas. Jei $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, tai sakykime $a \neq 0$. Tada

$$(x_1; y_1; z_1) = \left(-\tfrac{d}{a}; 0; 0\right), (x_2, y_2, z_2) = \left(-\tfrac{d}{a} - \tfrac{b}{a}; 1; 0\right), (x_3, y_3, z_3) = \left(-\tfrac{d}{a} - \tfrac{c}{a}; 0; 1\right)$$

yra trys skirtingi lygties $ax + by + cz + d = 0$ sprendiniai:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0.$$

Antrąją ir trečiąją lygtis atėmę iš pirmosios turėsime:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$$
$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0.$$

Jei $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), A_3(x_3, y_3, z_3)$ yra taškai, tai gavome, kad vektorius $\mathbf{n} = (a, b, c)$ yra stamenas vektoriams $\overrightarrow{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1}$ ir$\overrightarrow{\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}$:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1} = 0$$
$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1} = 0.$$

Taip pat turime, kad taškai A_1, A_2, A_3 nėra vienoje tiesėje. Todėl jie visi yra vienoje plokštumoje P, kurioje su bet kuriuo tašku $A(x; y; z)$ vektorius $\overrightarrow{\mathbf{AA}_1}$ yra vektorių $\overrightarrow{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1}$ ir$\overrightarrow{\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}$ tieisnė kombinacija:

$$\overrightarrow{\mathbf{AA}_1} = \boldsymbol{\alpha}\ \overrightarrow{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1} + \beta\ \overrightarrow{\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1}\ .$$

Tada vektorius $\mathbf{n} = (a, b, c)$ yra stamenas vektoriui $\overrightarrow{\mathbf{AA}_1}$:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AA}_1} = 0$$

arba

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

ir

$$ax + by + cz + d = 0$$

su visais plokštumos P taškais $(x; y; z)$.
Įrodyta. ■

11.3 Apibrėžimas. *Lygtis $ax+by+cz+d = 0$ vadinama bendrąja plokštumos P lygtimi.*

Tegu plokštumos P bendroji lygtis yra $ax + by + cy + d = 0$. Nagrinėjant jos padėtį koordinatinų ašių atžvilgiu, galimi šie atvejai.

1) $a = b = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (0; 0; c)$ lygiagretus Oz ašiai. Plokštuma P lygiagreti xy plokštumai.

2) $b = c = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (a; 0; 0)$ lygiagretus Ox ašiai. Plokštuma P lygiagreti yz plokštumai.

3) $a = c = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (0; b; 0)$ lygiagretus Oy ašiai. Plokštuma P lygiagreti xz plokštumai.

4) $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (0; b; c)$ statmenas Ox ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Ox ašiai.

5) $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (a; 0; c)$ statmenas Oy ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oy ašiai.

6) $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (a; b; 0)$ statmenas Oz ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oz ašiai.

7) $d = 0$.

Plokštuma P eina per tašką $(0; 0; 0)$.

8) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$.

Padaliję plokštumos P lygtį $ax + by + cy + d = 0$ iš $-d$ ir pažymėję

$$\alpha = -\tfrac{d}{a}, \beta = -\tfrac{d}{b}, \gamma = -\tfrac{d}{c}$$

turėsime plokštumos lygtį

$$\tfrac{x}{\alpha} + \tfrac{y}{\beta} + \tfrac{z}{\gamma} = 1,$$

kurią vadina *ašine plokštumos lygtimi*. Plokštuma P koordinatines ašis kerta taškuose: Ox ašį taške $(\alpha, 0, 0)$, Oy ašį taške $(0, \beta, 0)$, Oz ašį taške $(0, 0, \gamma)$.

Rasime taško atstumą iki duotos plokštumos.

11.4 Teorema. Taško $A_0\,(x_0; y_0; z_0)$ atstumas D iki plokštumos $P : ax + by + cz + d = 0$, yra lygus

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Įrodymas. Tegu $B(x_1;y_1;z_1)$ bet kuris plokštumos P taškas, o plokštumos normalės vektoriaus $\mathbf{n}=(a;b;c)$ pradžia yra taške B. Tada atstumas D yra lygus vektoriaus $\overrightarrow{\mathbf{BA}_0}$ projekcijos vektoriuje $\mathbf{n}$ ilgiui:

$$D=\left\|\mathrm{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{\mathbf{BA}_0}\right\|=\frac{\left|\overrightarrow{\mathbf{BA}_0}\cdot\mathbf{n}\right|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Turime

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathbf{BA}_0}&=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)\\ \overrightarrow{\mathbf{BA}_0}\cdot\mathbf{n}&=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)\\ \mathbf{n}&=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\end{aligned}$$

Tada

$$D=\frac{|a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Taškas B yra plokštumos P taškas, todėl jo koordinatės tenkina plokštumos P lygtį:

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0$$

ir

$$d=-ax_1-by_1-cz_1.$$

Iš čia gauname reikiamą D išraišką.
Įrodyta. $\blacksquare$

Aptarsime dviejų ir trijų plokštumų padėtį erdvėje.

11.5 Teorema (dviejų plokštumų padėtis erdvėje). *Tegu plokštumų P_1 ir P_2 lygtys yra:*

$$\begin{aligned}P_1&: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\\ P_2&: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0.\end{aligned}$$

1) Plokštumos P_1 ir P_2 lygiagrečios tada ir tik tada, kai

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

2) Plokštumos P_1 ir P_2 statmenos tada ir tik tada, kai

$$a_1 a_2+b_1 b_2+c_1 c_2= 0.$$

3) Kampo tarp ploštumų φ kosinusas yra lygus:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1 ir P_2 atitinkamai. Tada

1) $P_1 \parallel P_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}.$

2) $P_1 \perp P_1 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$

3) Kampas φ yra kampas tarp normalės vektorių $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$. Todėl

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodyta. ■

11.6 Teorema (trijų plokštumų padėtis erdvėje). *Tegu plokštumų P_1, P_2 ir P_3 lygtys yra:*

$$\begin{aligned} P_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ P_3 &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{aligned}$$

1) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 kertasi viename taške $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

2) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios vienai tiesei $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$
0.

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ir $\mathbf{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1, P_2 ir P_3 atitinkamai. Tada

1)

$$\begin{gathered}
\text{Plokštumos } P_1, P_2 \text{ ir } P_3 \text{ kertasi viename taške} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ nėra lygiagretūs vienai plokštumai (jei būtų lygiagretūs} \\
\text{vienai plokštumai, tai plokštumos kirsdamosi taške, kirstųsi ir tiese)} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ yra nekomplanarūs} \Longleftrightarrow \\
\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) \neq 0 \Longleftrightarrow \\
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.
\end{gathered}$$

2)

$$\begin{gathered}
\text{Plokštumos } P_1, P_2 \text{ ir } P_3 \text{ yra lygiagrečios vienai tiesei} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ lygiagretūs vienai plokštumai} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ yra komplanarūs} \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = 0 \Longleftrightarrow \\
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.
\end{gathered}$$

Įrodyta. ■

Galima viena iš aštuonių **trijų plokštumų** P_1, P_2 **ir** P_3 **padėčių erdvėje**. Jas aprašysime tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$$

sprendiniais.

Pažymėkime sistemos matricą A, o sistemos išplėstinę matricą B. Tada:

rank$A = 1$, rank$B = 2$

1) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\begin{gathered}
\tfrac{a_1}{a_2} = \tfrac{b_1}{b_2} = \tfrac{c_1}{c_2} \neq \tfrac{d_1}{d_2} \\
\tfrac{a_1}{a_3} = \tfrac{b_1}{b_3} = \tfrac{c_1}{c_3} \neq \tfrac{d_1}{d_3} \\
\tfrac{a_2}{a_2} = \tfrac{b_2}{b_2} = \tfrac{c_2}{c_2} \neq \tfrac{d_2}{d_2}
\end{gathered}$$

2) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos sutampa ir lygiagrečios trečiąjai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$
$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3}$$

rank$A = 2$, rank$B = 3$

3) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos lygiagrečios viena kitai ir nelygiagrečios trečiai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, $\mathbf{n}_3$ nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

4) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos kertasi teise, lygiagrečia trečiąjai plokštumai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs

rank$A = 3$

5) sistema suderinta $\Rightarrow$ plokštumos kertasi viename taške$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ -nekomplanarūs

rank$A =$rank$B = 1$

6) sistema suderinta $\Rightarrow$ visos plokštumos sutampa$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$
$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{d_1}{d_3}$$

rank$A =$rank$B = 2$

7) sistema suderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos sutampa ir nelygiagrečios trečiąjai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, $\mathbf{n}_3$ nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

8) sistema suderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos kertasi teise, esančia trečioje plokštumoje$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs.