

## 10 paskaita. Euklido erdvė

**10.1 Apibrėžimas.** Vektorinė erdvė  $E$  virš  $\mathbf{R}$  vadinama Euklido erdve, jeigu joje apibrėžta skaliejinė sandauga, t.y. tokia funkcija, kuri vektorių porai  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$  priskiria realųjį skaičių  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  ir tenkina aksiomas:

- S1)  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$  su visais  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ ;
- S2)  $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$  su visais  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in E$ ;
- S3)  $(a\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  su visais  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$  ir  $a \in \mathbf{R}$ ;
- S4)  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$  su visais  $\mathbf{u} \in E$  ir  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}$ .

**10.2 Apibrėžimai.** Neneigiamas skaičius  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$  vadinamas vektoriaus  $\mathbf{v}$  ilgiu, o skaičius  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$  vadinamas atstumu tarp vektorių  $\mathbf{u}$  ir  $\mathbf{v}$ .

**10.3 Teiginys.** Teisingos šios savybės:

- N1)  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$  ir  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{o}$ .
- N2)  $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$  su visais  $\mathbf{v} \in E$  ir  $a \in \mathbf{R}$ .
- N3)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$  su visais  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ .
- A1)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$  ir  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$ .
- A2)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ .
- A3)  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$  - trikampio nelygybė

**Įrodymas.** Savybės N1, N2, A1 ir A2 yra tiesioginės S1-S4 išvados. Savybės N3 ir A3 įrodymas remiasi Cauchy-Schwarz-Buniakovskio nelygybe, kurią įrodysime žemiau.

**10.4 Teorema (Cauchy-Schwarz-Buniakovskio nelygybė).** Euklido erdvėje  $E$  su visais  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$  teisinga nelygybė

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

**Įrodymas.** Nagrinėkime kvadratinę funkciją  $f(t)$ :

$$f(t) = (\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Iš 10.1 apibrėžimo turime, kad  $f(t) \geq 0$  su visomis  $t$  reikšmėmis, todėl

$$D = -4(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 4(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leq 0 \Rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

ir

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|.$$

Pastebėsime, kad

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow (u + tv, u + tv) = 0 \Leftrightarrow u \text{ ir } v \text{ yra tiesiškai priklausoma sistema.}$$

Įrodyta.

**10.5 Pavyzdys.** Aritmetinėje erdvėje  $\mathbf{R}^n$  skaliarinė sandauga apibrėžiama lygybe:

$$((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n.$$

Tada Cauchy-Schwarz-Buniakovskio nelygybė šioje erdvėje yra

$$|a_1 b_1 + \dots + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}.$$

**10.6 Apibrėžimas.** Kampas tarp nenulinių vektorių  $\mathbf{u}$  ir  $\mathbf{v}$  apibrėžiamas lygybe:

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

**10.7 Apibrėžimai.** 1. Nenuliniai vektoriai  $\mathbf{u}$  ir  $\mathbf{v}$  vadinami ortogonaliais, jeigu  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ .

2. Vektorius  $\mathbf{u}$  vadinamas normuotu, jeigu  $\|\mathbf{u}\| = 1$ .

3. Euklido erdvės bazė  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  vadinama ortogonalia, jeigu šie vektoriai yra poromis ortogonalūs, t.y.  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0$ , kai  $1 \leq i \neq j \leq n$ , ir ortonormuota, jeigu beto vektoriai yra normuoti, t.y.  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$  su visais  $i$ .

**10.8 Teiginys.** Jeigu nenulinių vektorių sistemos  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  vektoriai yra poromis ortogonalūs (vektorių sistema yra ortogonalė), tai ši sistema yra tiesiškai nepriklausoma.

**Įrodymas.** Tegū  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  yra ortogonalė vektorių sistema. Nagrinėkime lygybę

$$a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_m \mathbf{v}_m = \mathbf{o}.$$

Tada

$$(a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_m \mathbf{v}_m, e_i) = a_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i) + \dots + a_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) + \dots + a_m (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i) = a_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = 0$$

ir  $a_i = 0$  su visais  $i = 1, \dots, m$ .

**Įrodyta.**

Tegu  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  – ortogonalioji Euklido erdvės bazė, o  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$  ir  $u =$

$\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{v}_j$ . Turime

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n b_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^n a_i b_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i).$$

Jeigu, beto,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  – ortonormuota Euklido erdvės bazė, tai

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Ar visada Euklido erdvėje egzistuoja ortogonalios ir ortonormuota bazė? Į šį klausimą teigiamai atsako

### 10.8 Teorema (J.P.Gram - E.Schmidt ortogonalizacijos procesas).

Euklido erdvės  $E$  kiekvienai tiesiškai nepriklausomai sistemai  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$  egzistuoja veinareikšmiškai apibrėžta tokia vektorių sistema  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ , kad

- 1) vektoriai  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  poromis ortogonalūs (t.y. sistema yra ortogonalios);
- 2)  $\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]$  su visais  $2 \leq i \leq m$ .

**Įrodymas.** Indukcija pagal  $m$ . Kai  $m = 1$ , tai  $v_1 = u_1$  ir teiginys įrodytas. Įrodysime indukcinį teiginį  $m - 1 \Rightarrow m$ . Pagal indukcijos prielaidą, vektorių  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}$  sistemai egzistuoja tokia ortogonalios vektorių  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$  sistema, kad  $\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}]$  su visais  $2 \leq i \leq m - 1$ . Pastebėsime, kad  $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}]$ , nes su visais  $j = 1, 2, \dots, m - 1$  vektoriai  $\mathbf{v}_j = \mathbf{u}_j + (\mathbf{v}_j - \mathbf{u}_j) \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}]$

ir beto sistema  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}$  yra tiesiškai nepriklausoma ir todėl sudaro  $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}]$  bazę. Ieškomas vektorius  $v_m$  turi tenkinti šias savybes:

- 1)  $(\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1) = \dots = (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m-1}) = 0$
- 2)  $\mathbf{v}_m - \mathbf{u}_m \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m-1}]$ .

Taigi, vektorius  $\mathbf{v}_m$  turėtų būti lygus  $\mathbf{v}_m = \mathbf{u}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \mathbf{v}_{m-1}$ . Tada

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{u}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{v}_1) = \\ &= (\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1) + \lambda_1 (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}, \\ &\quad \dots, \\ 0 &= (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m-1}) = (\mathbf{u}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_{m-1} \mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{v}_{m-1}) = \\ &= (\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m-1}) + \lambda_{m-1} (\mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{v}_{m-1}) \Rightarrow \lambda_{m-1} = -\frac{(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m-1})}{\|\mathbf{v}_{m-1}\|^2}. \end{aligned}$$

Gavome

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{u}_m - \frac{(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \cdot \mathbf{v}_1 - \dots - \frac{(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}_{m-1})}{\|\mathbf{v}_{m-1}\|^2} \cdot \mathbf{v}_{m-1}.$$

Irodyta.

**10.9 Išvada.** Iš Gramo-Schmidto ortogonalizacijos proceso turime, kad bet kurioje Euklido erdvėje egzistuoja ortogonalinė bazė, o jeigu jos vektorius dar ir normuoti, tai ir ortonormuota bazė.

**10.10 Apibrėžimas.** Jeigu  $U$  yra Euklido erdvės  $E$  poerdvis, tai aibė

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in E : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \text{ su visais } \mathbf{u} \in U\}$$

vadinama poerdvio  $U$  ortogonalioju papildiniu.

**10.11 Teiginys.** Svarbiausios **ortogonalaus papildinio savybės** yra šios:

1.  $U^\perp$  yra  $E$  poerdvis.
2. Jeigu  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  yra  $U$  bazė, tai  $U^\perp = \{\mathbf{v} \in E \mid (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i) = 0, i = 1, \dots, m\}$ .
3.  $U \cap U^\perp = \{0\}$ .
4.  $\dim U^\perp = \dim E - \dim U$ .
5.  $E = U \oplus U^\perp$ .
6.  $(U^\perp)^\perp = U$ .

## Taikymai.

### 1. Ortogonalusis papildinys ir tiesinių lygčių sistema.

**Teiginys.** Tegu  $V$  yra Euklido erdvės  $\mathbf{R}^n$  poerdvis, generuotas eilutėmis  $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, v_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$ , ir  $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Tada šios sąlygos yra ekvivalentiškos:

- 1)  $v \in V^\perp$ .
- 2)  $(v, v_i) = 0$  su visais  $i = 1, \dots, m$ .
- 3)  $(x_1, \dots, x_n)$  yra tiesinės lygčių sistemos

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

sprendinys, t.y.  $V^\perp$  yra šios sistemos sprendinių aibė.

### 2. Tiesinių lygčių sistemos mažiausių kvadratų sprendinys.

Tegu  $Av = b$  yra tiesinių lygčių sistema, kurios matricoje  $A$  yra  $m$  eilučių ir  $n$  stulpelių, ir ji neturi sprendinių. Su kiekvienu  $v \in \mathbf{R}_n$  vektorius  $b - Av$  vadinamas *nesuderamumo vektoriumi*. Sistemos **mažiausių kvadratų sprendiniu** vadiname tokį vektorių  $v_0$ , kad vektoriaus  $b - Av_0$  ilgis yra mažiausias, t.y.  $\|b - Av_0\| = \min_{v \in \mathbf{R}_n} \|b - Av\|$ . Parodysime, kaip rasti šį sprendinį.

Tegu  $v = (x_1, \dots, x_n)^T$  ir  $Av = x_1c_1 + \dots + x_nc_n$ , čia  $c_1, \dots, c_n$  yra matricos  $A$  stulpeliai. Aišku, kad vektorių aibė  $V = \{Av | v \in \mathbf{R}_n\} \subseteq \mathbf{R}_m$  yra poerdvis lygus matricos  $A$  stulpelių  $c_1, \dots, c_n$  tiesiniam apvalkalui  $[c_1, \dots, c_n]$ . Vektoriaus  $u$  atstumu iki poerdvio  $V$  vadinamas  $\min_{w \in V} \|u - w\|$ . Tegu  $u = x + y$ , čia  $x \in V, y \in V^\perp$ .

Tada  $\|u - w\|^2 = (x - w + y, x - w + y) = (x - w, x - w) + (y, y)$ , nes  $x - w$  ir  $y$  yra ortogonalūs. Aišku, kad minimumas pasiekiamas, kai  $x = w$  ir lygus  $(y, y) = \|y\|^2$ . Gavome, kad vektoriaus  $u$  atstumas iki poerdvio  $V$  yra lygus vektoriaus  $u$  ortogonalios sudaromosios  $y$  ilgiui ir realizuojamas, kai  $w$  yra vektoriaus  $u$  ortogonalioji projekcija  $x$ .

Taigi vektorius  $v$  turi būti toks, kad  $Av$  būtų vektoriaus  $b$  ortogonalioji projekcija poerdvyje  $V = \{Av | v \in \mathbf{R}_n\}$ . Vektoriumi  $v$  surasti naudosime tokią procedūrą:

- 1) Raskime ortonormuotą matricos  $A$  stulpelių  $c_1, \dots, c_n$  tiesinio apvalkalo  $V = [c_1, \dots, c_n]$  bazę.
- 2) Raskime vektoriaus  $b$  projekcija  $p$  poerdvyje  $V$ .

3) Išreikškite vektorių  $p$  stulpelių  $c_1, \dots, c_n$  tiesine kombinacija:  $p = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n$ . Tada  $v = (x_1, \dots, x_n)^T$  ir yra ieškomas vektorius.

Parodysime, kaip kitaip galima rasti mažiausių kvadratų sprendinį. Pastebėsime, kad  $v$  yra mažiausių kvadratų sprendinys sistemai  $Av = b$  tada ir tik tada, kada  $Av - b$  ortogonalus  $V = [c_1, \dots, c_n]$  – matricos  $A$  stulpelių tiesiniam apvalkalui. Bet vektorius  $z \in \mathbf{R}^n$  yra ortogonalus  $V$  tada ir tik tada, kada jis yra sistemos  $A^T z = 0$  sprendinys, čia  $A^T$  – transponuota  $A$  matrica. Taigi,  $v$  yra mažiausių kvadratų sprendinys sistemai  $Av = b$  tada ir tik tada, kada  $v$  yra sistemos  $A^T (Av - b) = 0$  sprendinys, t.y.

$$A^T Av = A^T b.$$

Gavome, kad sistemos  $Av = b$  mažiausių kvadratų sprendinys yra sistemos  $A^T Av = A^T b$  sprendinys.

### 3. Gramo matrica.

**10.12 Apibrėžimas.** Tegu  $v_1, \dots, v_n$  yra Euklido erdvės  $E$  vektorių sistema. *Matrica*

$$G_{(v_1, \dots, v_n)} = \left( \left( \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{array} \right), (v_1, v_2, \dots, v_n) \right) = \begin{pmatrix} (v_1, v_1) & (v_1, v_2) & \dots & (v_1, v_n) \\ (v_2, v_1) & (v_2, v_2) & \dots & (v_2, v_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (v_n, v_1) & (v_n, v_2) & \dots & (v_n, v_n) \end{pmatrix}$$

vadinama sistemos  $v_1, \dots, v_n$  Gramo matrica.

**10.13 Pastabos.** 1. Vektorių sistema  $v_1, \dots, v_n$  yra tiesiškai nepriklausoma tada ir tik tada, kada sistemos Gramo matrica  $G_{(v_1, \dots, v_n)}$  neišsigimusi, t.y.  $\det G_{(v_1, \dots, v_n)} \neq 0$ .

2. Iš apibrėžimo turime, kad bazė  $v_1, \dots, v_n$  yra ortonormuota tada ir tik tada, kada bazės  $v_1, \dots, v_n$  Gramo matrica yra vienetinė.

Tegu  $v_1, \dots, v_n$  yra Euklido erdvės  $E$  bazė ir  $u, v$  – du  $E$  vektoriai:

$$u = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}^T (v_1, \dots, v_n)^T \text{ ir } v = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tada skaliarinė sandauga

$$\begin{aligned}
 (u, v) &= \left( \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{pmatrix} \right)^T (v_1, \dots, v_n)^T, (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \\
 &= \left( (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = \\
 (a_1, \dots, a_n) &\left( \left( \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}, (v_1, \dots, v_n) \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) = (a_1, \dots, a_n) G_{(v_1, \dots, v_n)} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Gramo matricos geometrinė prasmė.**

### 10.14 Apibrėžimai

1. Tegu  $u_1, \dots, u_m$  yra Euklido erdvės  $E$  vektoriai. Aibė

$$P(u_1, \dots, u_m) = \{a_1 u_1 + \dots + a_m u_m \mid 0 \leq a_i \leq 1, i = 1, \dots, m\}$$

vadinama gretasieniu.

2. Gretasienio  $P(u_1, \dots, u_m)$  tūris  $V_m(u_1, \dots, u_m)$  yra apibrėžiamas induktyviai:

1)  $V_1(u_1) = \|u_1\|$ ;

2)  $V_m(u_1, \dots, u_m) = V_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}) \cdot h$ , čia  $h$  – aukštinė, kuri yra lygi  $h = \|v\|$ , o vektorius  $v$  apibrėžiamas lygybėmis:  $(v, u_1) = \dots = (v, u_{m-1}) = 0$  ir  $u_m - v \in [u_1, \dots, u_{m-1}]$ .

Parodysime, kad aukštinė  $h$  apibrėžta korektiškai. Tegu  $v_1$  vektorius, tenkinantis sąlygas:  $(v_1, u_1) = \dots = (v_1, u_{m-1})$  ir  $u_m - v_1 \in [u_1, \dots, u_{m-1}]$ . Tada  $v - v_1 = (u_m - v_1) + (u_m - v) \in [u_1, \dots, u_{m-1}]$ , .t.y.

$$\begin{aligned}
 v - v_1 &= a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1}, \\
 (v - v_1, u_1) &= \dots = (v - v_1, u_{m-1}) = 0
 \end{aligned}$$

ir  $(v - v_1, a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1}) = 0 = (v - v_1, v - v_1) \Leftrightarrow v = v_1$ .

**10.15 Teorema.**  $(V_m(u_1, \dots, u_m))^2 = \det G_{(u_1, \dots, u_m)}$ .

**Įrodymas.** Indukcija pagal  $m$ .

Kai  $m = 1$ , tai  $(V_1(u_1))^2 = \|u_1\|^2 = (u_1, u_1) = \det((u_1, u_1))$ .

Įrodysime indukcinį teiginį  $(m - 1 \Rightarrow m)$ .

Tegu  $v$  yra aukštinės vektorius. Tada

$$\begin{aligned} u_m &= a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1} + v, \\ (v, u_1) &= \dots = (v, u_{m-1}) = 0. \end{aligned}$$

Tada

$$\det G_{(u_1, \dots, u_m)} = \det \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_{m-1}) & (u_1, a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1} + v) \\ (u_2, u_1) & \dots & (u_2, u_{m-1}) & (u_2, a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1} + v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_m, u_1) & \dots & (u_m, u_{m-1}) & (u_m, a_1 u_1 + \dots + a_{m-1} u_{m-1} + v) \end{pmatrix}.$$

Atimkime iš paskutiniojo stulpelio pirmąjį stulpelį padauginant iš  $a_1$ , antrąjį stulpelį padauginant iš  $a_2, \dots$ ,  $m-1$ -ąjį stulpelį padauginant iš  $a_{m-1}$ . Turėsime

$$\begin{aligned} \det G_{(u_1, \dots, u_m)} &= \det \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_{m-1}) & (u_1, v) \\ (u_2, u_1) & \dots & (u_2, u_{m-1}) & (u_2, v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_m, u_1) & \dots & (u_m, u_{m-1}) & (u_m, v) \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} (u_1, u_1) & \dots & (u_1, u_{m-1}) & 0 \\ (u_2, u_1) & \dots & (u_2, u_{m-1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_m, u_1) & \dots & (u_m, u_{m-1}) & (u_m, v) \end{pmatrix} = \\ &= \det G_{(u_1, \dots, u_{m-1})} \cdot (u_m, v) = \\ &= (V_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}))^2 \cdot (a_1 (u_1, v) + \dots + a_{m-1} (u_{m-1}, v) + (v, v)) = \\ &= (V_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}))^2 \cdot (v, v) = (V_{m-1}(u_1, \dots, u_{m-1}))^2 \cdot h^2 = (V_m(u_1, \dots, u_m))^2. \end{aligned}$$

**Įrodyta.**