

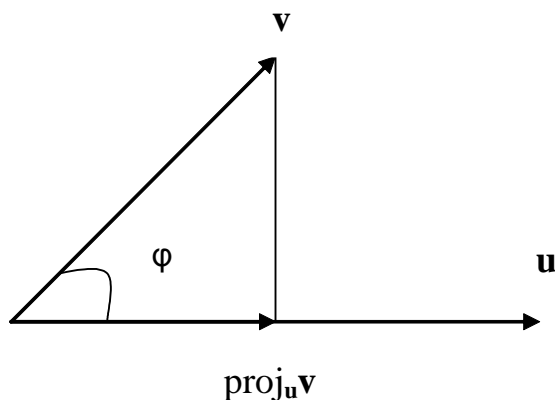
10 paskaita. *Vektoriai erdvėje. Vektorių vektorinė sandauga, savybės. Trijų vektorių mišrioji sandauga, savybės. Vektoriaus koordinatės bazės atžvilgiu.*

10.1 Apibrėžimas. *Vektorių erdvėje \mathbf{u} ir \mathbf{v} skaliarinė sandauga yra skaičius $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ apibrėžtas formule*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \varphi,$$

čia $\|\mathbf{u}\|$ ir $\|\mathbf{v}\|$ vektorių \mathbf{u} ir \mathbf{v} ilgiai, o φ kampas tarp vektorių.

Pastebėkime, kad skaičius $\|\mathbf{v}\| \cos \varphi$ yra vektoriaus \mathbf{v} projekcijos į vektorių \mathbf{u} ilgis, o pati projekcija yra vektorius $\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$:



Analogiškai $\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}$.

Tegu $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – vienetiniai vektoriai Dekarto koordinatinėse ašyse Ox, Oy, Oz . Tada vektoriaus \mathbf{u} Dekarto koordinatėmis vadiname skaičius:

$$\begin{aligned} \|\text{proj}_{\mathbf{i}} \mathbf{u}\| &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = u_1, \\ \|\text{proj}_{\mathbf{j}} \mathbf{u}\| &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = u_2, \\ \|\text{proj}_{\mathbf{k}} \mathbf{u}\| &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = u_3 \end{aligned}$$

Tada patį vektorių \mathbf{u} galima užrašyti taip:

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}.$$

Taigi turime

$$u_1 = \|u\| \cos \varphi_1, u_2 = \|u\| \cos \varphi_2, u_3 = \|u\| \cos \varphi_3,$$

čia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ yra vektoriaus \mathbf{u} kampai su koordinacių ašiu Ox, Oy, Oz teigiamomis kryptimis. Beto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \cos 0 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \\ (\|u\| \cos \varphi_1)^2 + (\|u\| \cos \varphi_2)^2 + (\|u\| \cos \varphi_3)^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \\ \|\mathbf{u}\|^2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3) &= \|\mathbf{u}\|^2 \\ \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 &= 1. \end{aligned}$$

Vektorių vektorinė sandauga, savybės.

Taikant vektorius geometrijoje, fizikoje ir kitur dažnai tenka nagrinėti vektorių statmenus duotiems dviems vektoriams. Mes parodysime kaip galima būtų apibrėžti tokį vektorių.

10.2 Apibrėžimas. Tegu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ir $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ yra vektoriai 3-matėje xyz -erdvėje. Vektorius

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

vadinamas vektorių \mathbf{u} ir \mathbf{v} vektorine sandauga.

10.3 Pastaba. Vektoriaus $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ koordinatės yra:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \\ \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) &= \\ (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) & \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad vektorių skaliarinė sandauga yra skaičius, o vektorinė sandauga - vektorius. Parodysime šių sandaugų tarpusavio ryšį.

10.4 Teorema. Tegu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ yra vektoriai 3-matėje xyz -erdvėje. Tada

- 1) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonalus \mathbf{u})
- 2) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonalus \mathbf{v})
- 3) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (Lagrange lygybė)
- 4) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$
- 5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}$

Įrodymas paliekamas skaitytojui.

Pateiksime pagrindines vektorinės sandaugos savybes.

10.5 Teorema. Tegu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ yra vektoriai 3-matėje xyz -erdvėje. Tada

- 1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
- 2) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- 3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
- 4) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
- 5) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- 6) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Įrodymas paliekamas skaitytojui.

10.6 Išvada. Ašinių vektorių $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektorinės sandaugos lentelė:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} .$$

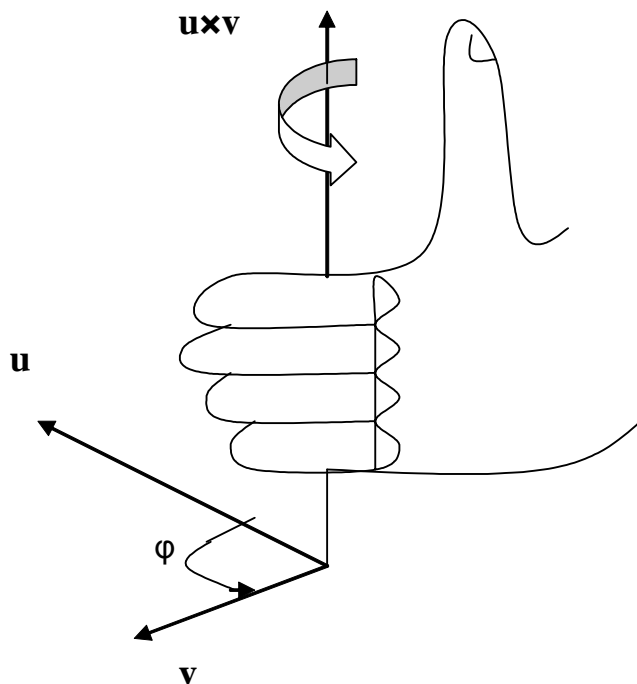
10.7 Teorema (geometrinė vektorinės sandaugos prasmė).

1) Vektorių \mathbf{u} ir \mathbf{v} vektorinės sandaugos ilgis yra lygus lygiagretainio, kurio kraštinės yra \mathbf{u} ir \mathbf{v} , plotui:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \varphi,$$

čia φ – kampas tarp \mathbf{u} ir \mathbf{v} .

2) Vektorių \mathbf{u} ir \mathbf{v} vektorinė sandauga yra vektorius statmenas plokštumai, kurioje yra vektoriai \mathbf{u} ir \mathbf{v} , ir nukreiptas taip, kad, žiūrint iš jo galo, sukant vektorių \mathbf{u} vektoriaus \mathbf{v} link mažiausiu kampu, sukama bus prieš laikrodžio rodyklę.



Irodymas. Pasinaudokite Lagrange lygybe.

10.8 Apibrėžimas. Tegu \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} yra vektoriai 3-matėje xyz -erdvėje. Tada skaičių

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

vadina trijų vektorių \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} **mišriąją sandaugą** ir kartais žymi $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Tegu $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ yra vektoriai 3-matėje xyz -erdvėje. Tada teisinga

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

10.9 Teorema (mišriosios sandaugos savybės ir geometrinė prasmė).

1) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u})$.

2) Vektorų $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ mišriosios sandaugos absoliuti reikšmė $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$ yra lygi gretasienio, kurio kraštinėmis yra vektoriai $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, tūriui.

3) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ tada ir tik tada, kai vektoriai $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ yra komplanarūs (yra vienoje plokštumoje).

4) Piramidės, kurios briaunomis yra vektoriai $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, tūris yra $\frac{1}{6} |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

10.10 Apibrėžimas Tris nenuliniai nekomplanarūs vektoriai $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$) vadinami erdvės baze.

10.11 Teorema. Bet kuris vektorius \mathbf{u} vienareikšmiškai reiškiamas baze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3.$$

Skaičiai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vadinami vektoriaus \mathbf{u} koordinatėmis bazėje $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Įrodymas. Vienatimumas.

Tegu turime dar vieną vektoriaus \mathbf{u} reiškimą baze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{u} = \lambda'_1 \mathbf{e}_1 + \lambda'_2 \mathbf{e}_2 + \lambda'_3 \mathbf{e}_3.$$

Turime

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) \mathbf{e}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) \mathbf{e}_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3) \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Padauginkime šią lygybę skaliariškai iš vektoriaus $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$:

$$(\lambda_1 - \lambda'_1) (\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)) = 0.$$

Turime $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$, todėl $\lambda_1 - \lambda'_1 = 0$ ir $\lambda_1 = \lambda'_1$. Analogiškai parodoma, kad $\lambda_2 = \lambda'_2$ ir $\lambda_3 = \lambda'_3$.

Egzistavimas. Tegu vektorius $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ išreikštas baze

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \mathbf{e}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}), \mathbf{e}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}) : \\ \mathbf{u} &= \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \\ (u_1, u_2, u_3) &= \lambda_1 (a_{11}, a_{12}, a_{13}) + \lambda_2 (a_{21}, a_{22}, a_{23}) + \lambda_3 (a_{31}, a_{32}, a_{33}) \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = u_1 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = u_2 \\ \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} + \lambda_3 a_{33} = u_3 \end{cases} .$$

Šios sistemos matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ neišsigimusi, nes

$$\det A = \det A^T = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0.$$

Todėl $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ galima surasti Cramerio formulėmis:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\det \begin{pmatrix} u_1 & a_{21} & a_{31} \\ u_2 & a_{22} & a_{32} \\ u_3 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \\ \lambda_2 &= \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & u_1 & a_{31} \\ a_{12} & u_2 & a_{32} \\ a_{13} & u_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}} = \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{u}, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \\ \lambda_3 &= \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & u_3 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}} = \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u})}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \end{aligned}$$

Gavome, kad

$$u = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \mathbf{e}_1 + \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{u}, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \mathbf{e}_2 + \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u})}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} \mathbf{e}_3.$$

Įrodyta.