Tiesinė algebra ir geometrija bioinformatikams. Paskaitų konspektas.

Rimantas Grigutis

9 paskaita. Poerdviai. Veiksmai su poerdviais.

9.1 Apibrėžimas. *Vektorinės erdvės V virš kūno $\mathbf{K}$ netuščias poaibis U vadinamas* ***poerdviu****, jeigu*

1) $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$ *su visais* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$;

2) $a\mathbf{u} \in U$ *su visais* $a \in \mathbf{K}$ *ir* $\mathbf{u} \in U$.

Vektorinės erdvės V poerdvis U irgi yra vektorinė erdvė virš $\mathbf{K}$.

9.2 Positive Examples.

1. The whole space $\mathbf{R}^n$ is a subspace of itself. And the set consisting of one vector, $\mathbf{o}$, is a subspace of any space.

2. In $\mathbf{R}^2$, consider the set W of all vectors which are parallel to a given line L. It is clear that the sum of two vectors which are parallel to L is itself parallel to L, and a scalar multiple of a vector which is parallel to L is itself parallel to L. Thus W is a subspace.

3. A similar argument shows that in $\mathbf{R}^3$, the set W of all vectors which are parallel to a given plane (line) is a subspace.

9.3 Negative Example.

In $\mathbf{R}^2$, the set of all vectors which are parallel to one of two fixed non-parallel lines, is not a subspace. Indeed, if we take a non-zero vector parallel to one of the lines and add a non-zero vector parallel to another line, we get a vector which is parallel to neither of these lines.

Svarbiu vektorinio poerdvio pavyzdžiu yra homogeninės tiesinių lygčių sistemos sprendinių aibė.

9.4 Teorema. *Homogeninės tiesinių lygčių sistemos*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad \text{arba } AX = O \qquad (1)$$

sprendinių aibė yra stulpelių aritmetinės erdvės $\mathbf{K}_n$ poerdvis, kurio dimensija lygi $n-\mathrm{rank}A$.

Įrodymas. Homogeninę tiesinių lygčių sistemą (1) užrašykime taip

$$x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$$
$$(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{o}$$

čia $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n-$ matricos A stulpeliai.
Tegu $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ir $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}-$ sistemos (1) sprendiniai, t.y.

$$\begin{array}{c} \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n \equiv \mathbf{o} \\ \beta_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{u}_n \equiv \mathbf{o} \end{array},$$

todėl

$$(a\alpha_1 + b\beta_1)\,\mathbf{u}_1 + \cdots (a\alpha_n + b\beta_n)\,\mathbf{u}_n \equiv \mathbf{o}$$

ir vektorius $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$ yra sistemos (1) sprendinys. Gavome, kad sprendinių aibė yra stulpelių aritmetinės erdvės $\mathbf{K}_n$ poerdvis.

Tarp tiesinės lygčių sistemos (1) matricos A stulpelių yra $r = \operatorname{rank} A$ tiesiškai neprikausomų stulpelių. Tegu tai stulpeliai $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_r$. Tada likusius $n-r$ stulpelius užrašykime jų tiesinėmis kombinacijomis:

$$\begin{array}{c} \mathbf{u}_{r+1} = b_{r+1,1}\mathbf{u}_1 + \cdots + b_{r+1,r}\mathbf{u}_r \\ \cdots \\ \mathbf{u}_n = b_{n1}\mathbf{u}_1 + \cdots + b_{nr}\mathbf{u}_r \end{array}.$$

Nesunku matyti, kad tiesiškai nepriklausomi stulpeliai

$$\mathbf{z}_{r+1} = \begin{pmatrix} b_{r+1,1} \\ \cdots \\ b_{r+1,r} \\ -1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \mathbf{z}_n = \begin{pmatrix} b_{n1} \\ \cdots \\ b_{nr} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

yra sistemos (1) sprendiniai.

Tegu $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdots \\ \gamma_r \\ \gamma_{r+1} \\ \cdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ – kuris nors sistemos (1) sprendinys. Tada

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}' + \gamma_{r+1}\mathbf{z}_{r+1} + \cdots + \gamma_n \mathbf{z}_n$$

irgi yra šios sistemos sprendinys. Vektoriaus $\mathbf{w}$ komponentės, pradedant $(r+1)-$ąją, yra lygios 0. Lygiomis nuliui bus ir likusios r komponenčių, nes vektorių sistema $\mathbf{u}_1, ..., u_r-$ tiesiškai nepriklausoma.

Taigi,

$$\mathbf{w} = \mathbf{o}$$

ir

$$\mathbf{v}' = -\gamma_{r+1}\mathbf{z}_{r+1} - \cdots - \gamma_n \mathbf{z}_n \ ,$$

t.y. stulpeliai $\mathbf{z}_{r+1}, ..., \mathbf{z}_n-$ tiesiškai neprikausoma sistema, generuojanti sistemos (1) sprendinių poerdvį . Ji vadinama sistemos (1) *fundamentaliąja sprendinių sistema*.

Įrodyta.

9.5 Pavyzdys. Nagrinėkime homogeninę lygtį

$$ax + by = 0.$$

Šios homogeninės lygties sprendinių aibė yra stulpelio $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ tiesinis apvalkalas $T = \left[\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right]$.Geometriškai - tai tiesė l dvimatėje plokštumoje, einati per koordinačių pradžią vektoriaus $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ kryptimi.

Poerdvių suma ir sankirta.

9.6 Apibrėžimas. *Vektorinės erdvės V poerdvių U ir W suma vadiname V poerdvį*

$$U+W=\{\mathbf{u}+\mathbf{w}|\mathbf{u}\in U,\mathbf{w}\in W\}\,.$$

Vektorinės erdvės V poerdvių U ir W sankirta vadiname V poerdvį

$$U\cap W=\{\mathbf{v}\in V|\mathbf{v}\in U \text{ ir } \mathbf{v}\in W\}\,.$$

9.6 Pastaba. 1) Poerdvių suma $U+W$ yra mažiausias V poerdvis, kuriame yra poerdviai U ir W.

2) Poervių sankirta $U\cap W$ yra didžiausias V poerdvis, esantis ir poerdvyje U ir poerdvyje W.

9.7 Teorema(apie poerdvių sumos ir sankirtos dimensijas)

$$\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W.$$

Įrodymas. Tegu $\dim U+W=r$, $\dim U\cap W=p$, $\dim U=s$ ir $\dim W=t$. ir $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_p-$ poerdvio $U\cap W$ bazė. Papildykime šią bazę iki poerdvių U ir V bazių.:

tegu $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_p,\mathbf{v}_{p+1},...,\mathbf{v}_s-$ U bazė, o $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_p,\mathbf{v}'_{p+1},...,\mathbf{v}'_t-$ V bazė.

Parodysime, kad vektorių sistema

$$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_p,\mathbf{v}_{p+1},...,\mathbf{v}_s,\mathbf{v}'_{p+1},...,\mathbf{v}'_t \qquad (2)$$

yra poerdvio $U+W$ bazė, t.y.kad ši sistema yra generuojanti ir tiesiškai neprik-lausoma sisitema.

Tegu $\mathbf{v}-$ bet kuris poerdvio $U+W$ vektorius, t.y. $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$, čia $\mathbf{u}\in U,\mathbf{w}\in W$. Taigi,

$$\mathbf{u}=a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_p\mathbf{v}_p+a_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}+\cdots+a_s\mathbf{v}_s$$

ir

$$\mathbf{w}=b_1\mathbf{v}_1+\cdots+b_p\mathbf{v}_p+b_{p+1}\mathbf{v}'_{p+1}+\cdots+b_t\mathbf{v}'_t\ .$$

Turime

$$\mathbf{v}=(a_1+b_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(a_p+b_p)\mathbf{v}_p+a_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}+\cdots+a_s\mathbf{v}_s+b_{p+1}\mathbf{v}'_{p+1}+\cdots+b_t\mathbf{v}'_t$$

ir todėl vektorių sistema $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,...,\mathbf{v}_p,\mathbf{v}_{p+1},...,\mathbf{v}_s,\mathbf{v}'_{p+1},...,\mathbf{v}'_t$ generuoja $U+W$.

Įrodysime šios sistemos tiesišką nepriklausomybę. Tegu

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p + c_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} + \cdots + c_s\mathbf{v}_s + c'_{p+1}\mathbf{v}'_{p+1} + \cdots + c'_t\mathbf{v}'_t = \mathbf{o}.$$

Tada vektorius

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p + \underset{\in U}{c_{p+1}}\mathbf{v}_{p+1} + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = -c'_{p+1}\mathbf{v}'_{p+1} \underset{\in W}{-} \cdots - c'_t\mathbf{v}'_t$$

priklauso $U \cap W$ ir todėl

$$\mathbf{z} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_p\mathbf{v}_p.$$

Gavome, kad

$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_p\mathbf{v}_p = -c'_{p+1}\mathbf{v}'_{p+1} - \cdots - c'_t\mathbf{v}'_t\ ,$$
$$a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_p\mathbf{v}_p + c'_{p+1}\mathbf{v}'_{p+1} + \cdots + c'_t\mathbf{v}'_t = \mathbf{o}$$

ir

$$a_1 = \cdots = a_p = c'_{p+1} = \cdots = c'_t = 0\ ,$$

nes vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p, \mathbf{v}'_{p+1}, ..., \mathbf{v}'_t -$ tiesiškai nepriklausoma sistema($W-$ bazė). Taigi, $\mathbf{z} = \mathbf{o}$.

Turime

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p + c_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} + \cdots + c_s\mathbf{v} = \mathbf{o}$$

ir

$$c_1 = \cdots = c_p = c_{p+1} = \cdots = c_s = 0,$$

nes vektoriai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p, \mathbf{v}_{p+1}, ..., \mathbf{v}_s -$ tiesiškai nepriklausoma sistema($U-$ bazė).

Įrodėme vektorių sistemos (2) tiesišką nepriklausomybę ir tuo pačiu tai, kad ji yra $U + W$ bazė. Poerdvių U, W , $U + V$ ir $U \cap W$ dimensijoms turime lygybes:

$$\dim U + V = s + t - p = \dim U + \dim V - \dim U \cap V.$$

Įrodyta.

Paskutinioji teorema formuoja mūsų intuiciją apie poerdvių padėtį daugiamatėse vektorinėse erdvėse.

9.8 Pavyzdys. Tegu U ir W yra vektorinės erdvės $\mathbf{R}^5$ poerdviai. Šių poerdvių padėtis pateiksime lentelėje:

n	$\dim U$	$\dim W$	$\dim(U \cap W)$	$\dim(U + W)$	poerdvių padėtis
2	1	1	0	2	tiesės kertasi taške
2	1	1	1	1	tiesės sutampa
3	2	2	1	3	plokštumos kertasi tiese
3	2	2	2	2	plokštumos sutampa
4	2	2	0	4	plokštumos kertasi taške
4	2	2	1	3	plokštumos kertasi tiese
4	2	2	2	2	plokštumos sutampa
5	3	2	0	5	erdvė ir plokštuma kertasi taške
5	3	2	1	4	erdvė ir plokštuma kertasi tiese
5	3	2	2	3	plokštuma yra erdvėje