Tiesinė algebra ir geometrija bioinformatikams. Paskaitų konspektas.

Rimantas Grigutis

7 paskaita. *Plokštuma ir tiesė erdvėje.*

Pirmosios teoremos kalba apie plokštumos erdvėje bendrąją lygtį.

7.1 Teorema(tiesioginė). *Jei P yra plokštuma erdvėje, tai egzistuoja tokie skaičiai a, b, c, d , kad $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, kad lygybė $ax + by + cz + d = 0$ yra P lygtis.*

7.2 Teorema(atvirkštinė). *Jei a,b,c,d yra tokie skaičiai, kad $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, tai egzistuoja plokštuma P, kurios lygtis yra $ax + by + cz + d = 0$.*

7.1 teoremos įrodymas. Tegu $A_0\left(x_0; y_{0;} z_0\right)$ – plokštumos P taškas, o $\mathbf{n} = (a; b; c)$ - vektorius, statmenas plokštumai P. Čia $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, nes vektorius $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Jei $A\left(x, y, z\right)$ – bet kuris plokštumos P taškas, tai vektoriai $\overrightarrow{A_0 A}= (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ ir $\mathbf{n}$ yra statmeni, todėl

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{A_0 A}=0$$

arba visi plokštumos P taškai ir tik jie tenkina lygtį:

$$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) + c\left(z - z_0\right) = 0.$$
$$ax + by + cz + \left(-ax_0 - by_0 - cz_0\right) = 0$$

Gavome, kad plokštumos P lygtis yra

$$ax + by + cz + d = 0,$$

čia $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.
Įrodyta. ■

7.2 teoremos įrodymas. Jei $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, tai sakykime $a \neq 0$. Tada

$$(x_1; y_1; z_1) = \left(-\tfrac{d}{a}; 0; 0\right), (x_2, y_2, z_2) = \left(-\tfrac{d}{a} - \tfrac{b}{a}; 1; 0\right), (x_3, y_3, z_3) = \left(-\tfrac{d}{a} - \tfrac{c}{a}; 0; 1\right)$$

yra trys skirtingi lygties $ax + by + cz + d = 0$ sprendiniai:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$
$$ax_2 + by_2 + cz_2 + d = 0$$
$$ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0.$$

Antrąją ir trečiąją lygtis atėmę iš pirmosios turėsime:

$$a\,(x_2 - x_1) + b\,(y_2 - y_1) + c\,(z_2 - z_1) = 0$$
$$a\,(x_3 - x_1) + b\,(y_3 - y_1) + c\,(z_3 - z_1) = 0.$$

Jei $A_1\,(x_1, y_1, z_1)\,, A_2\,(x_2, y_2, z_2)\,, A_3\,(x_3, y_3, z_3)$ yra taškai, tai gavome, kad vektorius $\mathbf{n} = (a, b, c)$ yra stamenas vektoriams $\overrightarrow{A_2A_1}$ ir$\overrightarrow{A_3A_1}$:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_2A_1} = 0$$
$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_3A_1} = 0.$$

Taip pat turime, kad taškai A_1, A_2, A_3 nėra vienoje tiesėje. Todėl jie visi yra vienoje plokštumoje P, kurioje su bet kuriuo tašku $A\,(x; y; z)$ vektorius $\overrightarrow{AA_1}$ yra vektorių $\overrightarrow{A_2A_1}$ ir$\overrightarrow{A_3A_1}$ tieisnė kombinacija:

$$\overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{\alpha}\ \overrightarrow{A_2A_1} + \beta\ \overrightarrow{A_3A_1}\ .$$

Tada vektorius $\mathbf{n} = (a, b, c)$ yra stamenas vektoriui $\overrightarrow{AA_1}$:

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$$

arba

$$a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) + c\,(z - z_1) = 0$$

ir

$$ax + by + cz + d = 0$$

su visais plokštumos P taškais $(x; y; z)$.
Įrodyta. ■

7.3 Apibrėžimas. *Lygtis $ax + by + cz + d = 0$ vadinama bendrąja plokštumos P lygtimi.*

Tegu plokštumos P bendroji lygtis yra $ax + by + cy + d = 0$. Nagrinėjant jos padėtį koordinatinų ašių atžvilgiu, galimi šie atvejai.

1) $a = b = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (0; 0; c)$ lygiagretus Oz ašiai. Plokštuma P lygiagreti xy plokštumai.

2) $b = c = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (a; 0; 0)$ lygiagretus Ox ašiai. Plokštuma P lygiagreti yz plokštumai.

3) $a = c = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (0; b; 0)$ lygiagretus Oy ašiai. Plokštuma P lygiagreti xz plokštumai.

4) $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (0; b; c)$ statmenas Ox ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Ox ašiai.

5) $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (a; 0; c)$ statmenas Oy ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oy ašiai.

6) $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$.

Vektorius $\mathbf{n} = (a; b; 0)$ statmenas Oz ašiai: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0$. Plokštuma P lygiagreti Oz ašiai.

7) $d = 0$.

Plokštuma P eina per tašką $(0; 0; 0)$.

8) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$.

Padaliję plokštumos P lygtį $ax + by + cy + d = 0$ iš $-d$ ir pažymėję

$$\alpha = -\tfrac{d}{a}, \beta = -\tfrac{d}{b}, \gamma = -\tfrac{d}{c}$$

turėsime plokštumos lygtį

$$\tfrac{x}{\alpha} + \tfrac{y}{\beta} + \tfrac{z}{\gamma} = 1,$$

kurią vadina *ašine plokštumos lygtimi*. Plokštuma P koordinatines ašis kerta taškuose: Ox ašį taške $(\alpha, 0, 0)$, Oy ašį taške $(0, \beta, 0)$, Oz ašį taške $(0, 0, \gamma)$.

Rasime taško atstumą iki duotos plokštumos.

7.4 Teorema. Taško $A_0(x_0; y_0; z_0)$ atstumas D iki plokštumos $P : ax + by + cz + d = 0$, yra lygus

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Įrodymas. Tegu $B(x_1; y_1; z_1)$ bet kuris plokštumos P taškas, o plokštumos normalės vektoriaus $\mathbf{n} = (a; b; c)$ pradžia yra taške B. Tada atstumas D yra lygus vektoriaus $\overrightarrow{BA_0}$ projekcijos vektoriuje $\mathbf{n}$ ilgiui:

$$D = \left\| \mathrm{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{BA_0} \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{BA_0} \cdot \mathbf{n} \right|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Turime

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA_0} &= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \\ \overrightarrow{BA_0} \cdot \mathbf{n} &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) \\ \mathbf{n} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Tada

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Taškas B yra plokštumos P taškas, todėl jo koordinatės tenkina plokštumos P lygtį:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

ir

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1.$$

Iš čia gauname reikiamą D išraišką.
Įrodyta. ■

Aptarsime dviejų ir trijų plokštumų padėtį erdvėje.

7.5 Teorema (dviejų plokštumų padėtis erdvėje). *Tegu plokštumų P_1 ir P_2 lygtys yra:*

$$\begin{aligned} P_1 &: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ P_2 &: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0. \end{aligned}$$

1) Plokštumos P_1 ir P_2 lygiagrečios tada ir tik tada, kai

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

2) Plokštumos P_1 ir P_2 statmenos tada ir tik tada, kai

$$a_1 a_2+b_1 b_2+c_1 c_2= 0.$$

3) Kampo tarp ploštumų φ kosinusas yra lygus:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1=(a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1 ir P_2 atitinkamai. Tada

1) $P_1 \parallel P_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

2) $P_1 \perp P_1 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

3) Kampas φ yra kampas tarp normalės vektorių $\mathbf{n}_1$ ir $\mathbf{n}_2$. Todėl

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1\|\,\|\mathbf{n}_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Įrodyta. ■

7.6 Teorema (trijų plokštumų padėtis erdvėje). *Tegu plokštumų P_1, P_2 ir P_3 lygtys yra*:

$$\begin{aligned} P_1 &: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ P_2 &: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ P_3 &: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0. \end{aligned}$$

1) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 kertasi viename taške $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

2) Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios vienai tiesei $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

Įrodymas. Vektoriai $\mathbf{n}_1=(a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ir $\mathbf{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ yra normalės vektoriai plokštumoms P_1, P_2 ir P_3 atitinkamai. Tada

1)

$$
\begin{gathered}
\text{Plokštumos } P_1, P_2 \text{ ir } P_3 \text{ kertasi viename taške} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ nėra lygiagretūs vienai plokštumai (jei būtų lygiagretūs} \\
\text{vienai plokštumai, tai plokštumos kirsdamosi taške, kirstųsi ir tiese)} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ yra nekomplanarūs} \Longleftrightarrow \\
\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) \neq 0 \Longleftrightarrow \\
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.
\end{gathered}
$$

2)

$$
\begin{gathered}
\text{Plokštumos } P_1, P_2 \text{ ir } P_3 \text{ yra lygiagrečios vienai tiesei} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ lygiagretūs vienai plokštumai} \Longleftrightarrow \\
\text{vektoriai } \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \text{ ir } \mathbf{n}_3 \text{ yra komplanarūs} \Longleftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = 0 \Longleftrightarrow \\
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.
\end{gathered}
$$

Įrodyta. ■

Galima viena iš aštuonių trijų plokštumų P_1, P_2 ir P_3 padėčių erdvėje. Jas aprašysime tiesinių lygčių sistemos

$$
\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}
$$

sprendiniais.

Pažymėkime sistemos matricą A, o sistemos išplėstinę matricą B. Tada:

$\mathrm{rank}A = 1$, $\mathrm{rank}B = 2$

1) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ Plokštumos P_1, P_2 ir P_3 yra lygiagrečios$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$
\begin{array}{c}
\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \\
\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3} \\
\frac{a_2}{a_2} = \frac{b_2}{b_2} = \frac{c_2}{c_2} \neq \frac{d_2}{d_2}
\end{array}
$$

2) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos sutampa ir lygiagrečios trečiąjai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$
$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3}$$

rank$A = 2$, rank$B = 3$

3) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos lygiagrečios viena kitai ir nelygiagrečios trečiai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, $\mathbf{n}_3$ nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

4) sistema nesuderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos kertasi teise, lygiagrečia trečiąjai plokštumai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs

rank$A = 3$

5) sistema suderinta $\Rightarrow$ plokštumos kertasi viename taške$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ -nekomplanarūs

rank$A =$rank$B = 1$

6) sistema suderinta $\Rightarrow$ visos plokštumos sutampa$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - kolinearūs ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$
$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{d_1}{d_3}$$

rank$A =$rank$B = 2$

7) sistema suderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos sutampa ir nelygiagrečios trečiąjai$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ - kolinearūs, $\mathbf{n}_3$ nekolinearus ir

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

8) sistema suderinta $\Rightarrow$ dvi plokštumos kertasi teise, esančia trečioje plokštumoje$\Leftrightarrow$ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - komplanarūs ir poromis nekolinearūs.

Tiesę erdvėje galima apibrėžti kaip dviejų susikertančių plokštumų susikirtimo bendrų taškų aibę.

7.7 Apibrėžimas. *Dviejų tiesinių lygčių sistema:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} . \qquad (1)$$

vadinama tiesės bendrąja lygtimi erdvėje.

Tegu $A_0\,(x_0; y_0; z_0) -$ fiksuotas tiesės T taškas, o $A\,(x; y; z)$ - bet kuris tiesės T taškas, ir $\mathbf{v} = (k; l; m)$ - nenulinis vektorius lygiagretus tiesei T. Tada vektoriai $\overrightarrow{A_0A} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k; l; m)$ yra kolinearūs:

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}.$$

Ši dviguba lygybė yra teisinga su visais tiesės taškais $A\,(x; y; z)$ ir todėl ji yra tiesės T lygtimi: tai ir yra *kanoninė tiesės* T *lygtis,* o vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ vadinamas tiesės T *krypties vektoriumi.*

Vektorių $\overrightarrow{A_0A} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ir $\mathbf{v} = (k, l, m)$ kolinearumą galėtume užrašyti ir taip:

$$\overrightarrow{A_0A} = t\mathbf{v}.$$

Jeigu O yra koordinčių sistemos pradžios taškas($O = (0; 0; 0)$), tai $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA_0}$ ir

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_0} + t\mathbf{v}.$$

Ši lygtis vadinama *vektorine tiesės lygtimi.* Tai galima užrašyti ir taip:

$$(x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t\,(k; l; m)$$

ir

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tk \\ y &= y_0 + tl \\ z &= z_0 + tm \end{aligned}$$

Tai *parametrinės tiesės* T *lygtys.*

Kaip iš bendrosios tiesės lygties rasti kanoninę tiesės lygtį?

Tegu (1) yra bendroji tiesės T lygtis. Tiesės T krypties vektorius $\mathbf{v} = (k, l, m)$ tai bet kuris vektorius *lygiagretus* abiems plokštumoms: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, t.y. vektorius $\mathbf{v}$ yra statmenas abiems plokštumų normalės vektoriams $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Taigi vektoriumi $\mathbf{v}$ galėtų būti vektorius

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Norint rasti kurį nors vieną tiesės tašką A_0, reiktų paimti kurį nors sistemos (1) sprendinį (x_0, y_0, z_0).

Tiesių padėtis koordinačių sistemos atžvilgiu.

Tegu $\mathbf{v} = (k, l, m)$ - tiesės T krypties vektorius.
1. $k = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow T$ lygiagreti yz plokštumai
2. $l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = 0 \Leftrightarrow T$ lygiagreti xz plokštumai
3. $m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0 \Leftrightarrow T$ lygiagreti xy plokštumai
4. $k = l = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{k} \Leftrightarrow T$ lygiagreti Oz ašiai
5. $l = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{i} \Leftrightarrow T$ lygiagreti Ox ašiai
6. $k = m = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \parallel \mathbf{j} \Leftrightarrow T$ lygiagreti Oy ašiai.

7.8 Teorema(dviejų tiesių padėtis erdvėje). *Tegu duotos dvi tiesės:*

$$T_1 : \frac{x - x_1}{k_1} = \frac{y - y_1}{l_1} = \frac{z - z_1}{m_1}$$
$$T_2 : \frac{x - x_2}{k_2} = \frac{y - y_2}{l_2} = \frac{z - z_2}{m_2}.$$

Tada
1) tiesės T_1 ir T_2 lygiagrečios $\Longleftrightarrow \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$.
2) tiesės T_1 ir T_2 statmenos $\Longleftrightarrow k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0$.
3) kampas φ tarp tiesių T_1 ir T_2 randamas iš lygties

$$\cos\varphi = \frac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{\sqrt{k_1 + l_1 + m_1}\sqrt{k_2 + l_2 + m_2}} .$$

4) tiesės T_1 ir T_2 yra prasilenkiančios $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

5) tiesės T_1 ir T_2 priklauso vienai plokštumai $\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Įrodymas.

1)

$$\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ lygiagrečios } \Longleftrightarrow$$
$$\text{krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ lygiagretūs} \Longleftrightarrow$$
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

2)

$$\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ statmenos} \Longleftrightarrow$$
$$\text{krypties vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ ir } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ statmeni}$$
$$\Longleftrightarrow k_1 k_2 + l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0.$$

3) kampas φ tarp tiesių T_1 ir T_2 tai kampas tarp krypties vektorių $\mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1)$ ir $\mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2)$, todėl

$$\cos\varphi = \frac{k_1 k_2 + l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{k_1 + l_1 + m_1}\sqrt{k_2 + l_2 + m_2}}.$$

4)

$$\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ yra prasilenkiančios} \Longleftrightarrow$$
$$\text{vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ , } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir } \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\textit{nėra komplanarūs}$$
$$\Longleftrightarrow \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \neq 0.$$

5)

$$\text{tiesės } T_1 \text{ ir } T_2 \text{ priklauso vienai plokštumai} \Longleftrightarrow$$
$$\text{vektoriai } \mathbf{v}_1 = (k_1, l_1, m_1) \text{ , } \mathbf{v}_2 = (k_2, l_2, m_2) \text{ ir } \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\textit{komplanarūs} \Longleftrightarrow$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) = 0.$$

Įrodyta. ■

7.9 Teorema(tiesės ir plokštumos padėtis erdvėje). *Tegu duota tiesė* T :

$$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{m}$$

ir plokštuma P :

$$ax+by+cz+d=0.$$

1) tiesė T *lygiagreti plokštumai* P $\Longleftrightarrow ak+bl+cm=0$

2) tiesė T *statmena plokštumai* P $\Longleftrightarrow \frac{a}{k}=\frac{b}{l}=\frac{c}{m}.$

Įrodymas. Tiesė T lygiagreti plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės T krypties vektorius $\mathbf{v}=(k,l,m)$ *statmenas* plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n}=(a,b,c)$:

$$ak+bl+cm=0$$

Tiesė T statmena plokštumai P tada ir tik tada, kai tiesės T krypties vektorius $\mathbf{v}=(k,l,m)$ *lygiagretus* plokštumos P normalės vektoriui $\mathbf{n}=(a,b,c)$:

$$\frac{a}{k}=\frac{b}{l}=\frac{c}{m}.$$

Įrodyta. ■

Taško atstumas iki tiesės.

Tegu A ir $B-$ du skirtingi tiesės T taškai, o $P-$ bet kuris tiesės T taškas. Tada vektoriai $\overrightarrow{AP}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearūs:

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}.$$

7.10 Teorema(taško atstumas iki tiesės). *Tegu* C *yra erdvės taškas, o* A ir $B-$ du skirtingi tiesės T taškai. *Egzistuoja vienintėlis toks tiesės* T *taškas* P(jis vadinamas C projekcija tiesėje T), *kad vektorius* $\overrightarrow{CP}$ *yra statmenas vektoriui* $\overrightarrow{AB}$ *ir*

$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB} \qquad t=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2},$$

taško C *atstumas iki tiesės* T *lygus*

$$CP = \frac{\sqrt{AC^2 \cdot AB^2 - \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\right)^2}}{AB}.$$

Įrodymas. Vektorius $\overrightarrow{CP}$ turi būti statmenas vektoriui $\overrightarrow{AB}$. Tada

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
\left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
\left(t\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
t\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
t = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}.
\end{gathered}$$

Vektoriai $\overrightarrow{CP}$ ir $\overrightarrow{AP}$ yra statmeni, todėl iš Pitagoro teoremos trikampiui PAC (kampas prie viršūnės $P-$ status) turime:

$$\begin{gathered}
CP^2 = AC^2 - AP^2 = \\
AC^2 - \left\|t\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \\
AC^2 - t^2 AB^2 = \\
AC^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|AB\|^2}\right)^2 AB^2 = \\
\frac{AC^2 \cdot AB^2 - \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}\right)^2}{AB^2}.
\end{gathered}$$

Įrodyta. ■