

7 paskaita *Matricos.*

7.1 Apibrėžimas. *Matrica A yra m eilučių ir n stulpelių turinti stačiakampė lentelė su joje įrašytais skaičiais $a_{ij}, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

čia skaičius a_{ij} yra matricos A i - oje eilutėje ir j - ame stulpelyje. Skaičių a_{ij} žymėsime ir taip : $a_{ij} = (A)_{ij}$.

Visų matricų, turinčių m eilučių ir n stulpelių, aibę žymėsime $\mathbf{M}_{m \times n}$. Sakysime, kad dvi matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ iš $\mathbf{M}_{m \times n}$ yra lygios, $A = B$, jei $a_{ij} = b_{ij}$ su visais i ir j .

Matricų aibėje $\mathbf{M}_{m \times n}$ yra apibrėžiami šie veiksmi: matricų sudėtis, matricos daugyba iš skaičiaus, matricų daugyba.

Matricų sudėtis:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \text{ t.y. } (A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

Matricos daugyba iš skaičiaus:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}), \text{ t.y. } (\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij}.$$

7.2 Apibrėžimas.

- 1) *Matricos A priešinga matrica vadinsime matricą $(-1) \cdot A = -A$.*
- 2) *Nulinė matrica vadinsime matricą*

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricių aibėje $\mathbf{M}_{m \times n}$, kurioje apibrėžti sudėties ir daugybos iš skaičiaus veiksmai, yra teisingos šios savybės (čia α, β – skaičiai, $A, B, C \in \mathbf{M}_{m \times n}$):

V1. (sudėties asociatyvumas) $(A + B) + C = A + (A + C)$.

V2. (sudėties komutatyvumas) $A + B = B + A$.

V3. (nulinės matricos egzistavimas) $O + A = A$.

V4. (priešingos matricos egzistavimas) $A + (-A) = O$.

V5. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

V6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

V7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

V8. $1 \cdot A = A$.

7.3 Apibrėžimas. Tegu $A_1, \dots, A_s \in M_{m \times n}$, o $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ – skaičiai. Matricę $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_s A_s$ vadina matricių A_1, \dots, A_s tiesine kombinacija.

Parodysime kaip tiesinių lygčių sistemą reikšti stulpelių tiesine kombinacija.

Tegu turime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Pažymėkime stulpelius:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tada tiesinių lygčių sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = B.$$

Taigi, norint išspręsti tiesinių lygčių sistemą (1) reikia stulpelį B išreikšti stulpelių A_1, A_2, \dots, A_n tiesine kombinacija.

Matricių sandauga.

7.4 Apibrėžimas. Matricių A ir B sandauga $A \cdot B = AB$ apibrėžiama tik tada, kai matricos A stulpelių skaičius sutampa su matricos B eilučių skaičiumi. Jeigu $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times n}$ ir $B = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{n \times r}$, tai matrica $AB \in \mathbf{M}_{m \times r}$ ir

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^n (A)_{is} (B)_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

7.5 Pavyzdžiai.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2) \text{ Sandauga } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ neapibrėžta.}$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 41 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 19 & 34 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad matricų sandauga ne visada apibrėžta, o net kai apibrėžta - ne visada komutatyvi (3),4) pavyzdžiai).

Tiesinių lygčių sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matricų sandaugos savybės:

$$S1. \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

$$S2. (\text{sandaugos asociatyvumas}) (AB)C = A(BC).$$

$$S3. (\text{distributyvumas}) (A+B)C = AC + BC.$$

$$S4. (\text{distributyvumas}) D(A+B) = DA + DB.$$

7.6 Sandaugos asociatyvumo įrodymas.

Jeigu lygybės $(AB)C = A(BC)$ abi pusės yra apibrėžtos, tai $A \in \mathbf{M}_{m \times n}$, $B \in \mathbf{M}_{n \times r}$, $C \in \mathbf{M}_{r \times s}$. Tada $AB \in \mathbf{M}_{m \times r}$, $(AB)C \in \mathbf{M}_{m \times s}$ ir $BC \in \mathbf{M}_{n \times s}$, $A(BC) \in \mathbf{M}_{m \times s}$. Taigi matricos $(AB)C$ ir $A(BC)$ yra to pačio dydžio. Turime

$$\begin{aligned}
((AB)C)_{ij} &= \sum_{u=1}^r (AB)_{iu} \cdot (C)_{uj} = \sum_{u=1}^r \left(\sum_{v=1}^n (A)_{iv} (B)_{vu} \right) \cdot (C)_{uj} = \\
& \sum_{u=1}^r \left(\sum_{v=1}^n ((A)_{iv} (B)_{vu}) \cdot (C)_{uj} \right) = \sum_{v=1}^n \left(\sum_{u=1}^r (A)_{iv} \cdot ((B)_{vu} (C)_{uj}) \right) = \\
& \sum_{v=1}^n \left((A)_{iv} \cdot \sum_{u=1}^r ((B)_{vu} (C)_{uj}) \right) = \sum_{v=1}^n \left((A)_{iv} \cdot (BC)_{vj} \right) = (A(BC))_{ij}.
\end{aligned}$$

Čia pasinaudojome skaičių distributyvumo savybę:

$$\begin{aligned}
\sum_{u=1}^r \sum_{v=1}^n d_{uv} &= \sum_{u=1}^r (d_{u1} + d_{u2} + \cdots + d_{un}) = \\
(d_{11} + d_{12} + \cdots + d_{1n}) &+ (d_{21} + d_{22} + \cdots + d_{2n}) + \cdots + (d_{r1} + d_{r2} + \cdots + d_{rn}) = \\
(d_{11} + d_{21} + \cdots + d_{r1}) &+ (d_{12} + d_{22} + \cdots + d_{r2}) + \cdots + (d_{1n} + d_{2n} + \cdots + d_{rn}) = \\
\sum_{v=1}^n (d_{1v} + d_{2v} + \cdots + d_{rv}) &= \sum_{v=1}^n \sum_{u=1}^r d_{uv}.
\end{aligned}$$

Įrodyta.

Paaškinsime matricų sandaugos veiksmo apibrėžimą tiesinių keitinių kompozicijos veiksmu. Tegu turime du tiesinius kintamųjų keitinius:

$$\begin{aligned}
y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\
y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\
&\dots\dots\dots \\
y_k &= b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \cdots + b_{kn}x_n
\end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned}
z_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1k}y_k \\
z_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2k}y_k \\
&\dots\dots\dots \\
z_m &= a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mk}y_k.
\end{aligned}$$

Užrašykime šiuos keitinius matricomis:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix},$$

čia $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m \times k}$ ir $B = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{k \times n}$ - keitinių matricos.
Tada tiesinio keitinio

$$z_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_n$$

$$z_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_n$$

.....

$$z_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mk}x_n$$

matrica $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$ yra lygi AB :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_m \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

7.7 Apibrėžimas. Kvadratinė matrica $I_n = (\delta_{ij}) \in \mathbf{M}_{n \times n}$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j \\ 0, & \text{kai } i \neq j \end{cases}$
vadinama n - osios eilės vienetine matrica:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

7.8 Teiginys. Su visomis matricomis $A \in \mathbf{M}_{n \times m}$ teisingos lygybės:

$$A \cdot I_m = I_n \cdot A = A.$$

Kvadratinių matricų aibė \mathbf{M}_n kaip realiųjų skaičių aibės plėtinys.

Kvadratinių matricų aibėje $\mathbf{M}_{n \times n} = \mathbf{M}_n$ yra apibrėžtos šios operacijos: matricų suma, matricos sandauga iš skaičiaus ir matricų sandauga. Šių operacijų atžvilgiu teisingos $V1-V8$; $S1-S4$ savybės. Iš 4.8 teiginio turime, kad teisinga ir dar viena savybė

$S5$ (vienetinės matricos egzistavimas). $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ su visomis $A \in \mathbf{M}_n$

Žinome, kad realiųjų skaičių aibėje \mathbf{R} taip pat yra teisingos $V1-V8$; $S1-S4$ savybės. Ir tai nėra atsitiktinumas, nes skaičių aibės \mathbf{R} ir matricų aibės $\{\alpha \cdot I_n \in \mathbf{M}_n \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ yra abipus vienareikšmiškos (bijektyvus) ryšio (funkcija) apibrėžtas formule

$$f(\alpha) = \alpha \cdot I_n$$

Tikrai, jei $f(\alpha) = f(\beta)$, tai $\alpha \cdot I_n = \beta \cdot I_n$ ir $\alpha = \beta$.
Beto ši funkcija "išlaiko operacijas":

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= f(\alpha) + f(\beta) \\ f(\alpha \cdot \beta) &= f(\alpha) \cdot f(\beta) \end{aligned}$$

su visais $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Tikrai

$$f(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \cdot I_n = \alpha \cdot I_n + \beta \cdot I_n = f(\alpha) + f(\beta)$$

ir

$$f(\alpha\beta) = (\alpha\beta) \cdot I_n = \alpha(\beta \cdot I_n) = (\alpha \cdot I_n) \cdot (\beta \cdot I_n) = f(\alpha) \cdot f(\beta).$$

Žiūrėdami į realiuosius skaičius α kaip į matricas $\alpha \cdot I_n$, suprantame, kad aibė \mathbf{R} yra matricų aibės \mathbf{M}_n poaibis:

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{M}_n.$$

Tačiau \mathbf{R} nėra paprastas \mathbf{M}_n poaibis, nes abiejose aibėse yra panašiai apibrėžiamos pagrindinės operacijos. Ši panašumą mes išreiškėme apibrėždami operacijas išlaikančią abipus vienareikšmišką funkciją f . Beto abiejose aibėse teisingos $V1-V8$; $S1-S4$ savybės. Galima sakyti, kad matricų aibė \mathbf{M}_n paveldi skaičių aibės \mathbf{R} savybes. Bet ar visos? Jau žinome, kad tikrai ne. Juk skaičiams būdingas sandaugos komutatyvumas:

S6.(sandaugos komutatyvumas) Su visais a ir $\beta \in \mathbf{R}$ teisinga $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ negalioja matricų aibėje \mathbf{M}_n . Taigi praplėtus skaičių aibę \mathbf{R} matricų aibe \mathbf{M}_n prarandamas sandaugos komutatyvumas.

Ir tai dar ne viskas. Prisiminkime, kad kiekvienas *nenulinis* aibės \mathbf{R} skaičius α turi atvirkštinį:

7S.(atvirkštinio elemento egzistavimas) Su visais $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$ egzistuoja atvirkštinis skaičius: α^{-1} , toks, kad $\alpha \cdot (\alpha^{-1}) = 1$.

Atvirkštinio skaičiaus egzistavimas įgalina aibėje \mathbf{R} apibrėžti dalybos operaciją iš nenulinio skaičiaus, o tuo pačiu ir tiesinės lygties $\alpha x = \beta$ sprendimą, kai $\alpha \neq 0$.

Ar matricų aibė \mathbf{M}_n paveldi šią savybę. Atsakymas - ne. Bet yra nemažai matricų, kurios turi atvirkštines. Išnagrinėkime šį klausimą.

7.9 Apibrėžimas (atvirkštinės matricos apibrėžimas) Sakome, kad kvadratinė matrica $A \in \mathbf{M}_n$ turi atvirkštinę matricą, jeigu egzistuoja tokia kvadratinė matrica $B \in \mathbf{M}_n$, kad

$$AB = BA = I_n.$$

Matricos A atvirkštinę matricą žymi A^{-1} .

7.10 Teiginys (atvirkštinės matricos vienatimumas). Jeigu B ir C yra matricos A atvirkštinės, tai $B = C$.

Įrodymas. Tegu matricos B ir C yra matricos A atvirkštinės:

$$AB = BA = I_n \text{ ir } AC = CA = I_n.$$

Tada

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_n C = C$$

Įrodyta.

7.11 Teorema (matricų turinčių atvirkštines požymiai)

Tegu $A \in \mathbf{M}_n$. Visos žemiau pateiktos sąlygos yra ekvivalenčios.

1. Matrica A - neišsigimusi.
2. Homogeninių tiesinių lygčių sistema $AX = O$ turi vienintėlį sprendinį.

Čia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ir $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. $\det A \neq 0$.

4. Matrica A turi atvirkštinę matricą.

5. Su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Prieš įrodant šią teoremą be įrodymo suformuluosime teiginį, kuriuo pasinaudosime teoremos įrodyme.

7.12 Teiginys. Tegu matricos A ir B tokios, kad apibrėžta AB . Tada

$$\begin{aligned}\text{rank}(AB) &\leq \text{rank}A, \\ \text{rank}(AB) &\leq \text{rank}B.\end{aligned}$$

7.11 Teoremos įrodymas. Jau aukščiau matėme, kad $1 \Leftrightarrow 2$ (3 paskaitos 3.10 išvada) ir $1 \Leftrightarrow 3$ (praeitos paskaitos teiginys).

Dabar įrodysime teiginius tokia tvarka $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 5$.

Turime, kad $\text{rank}A = n$. Tada

$$n = \text{rank}A \leq \text{rank}(A|B) \leq n.$$

Todėl

$$\text{rank}A = \text{rank}(A|B) = n$$

ir pagal Kroneckerio-Capellio 3.9 teoremą tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Įrodyta.

$5 \Rightarrow 4$.

Turime, kad su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Tegu stulpelis X_1 yra sistemos $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys, stulpelis X_2 -

sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys, ..., stulpelis X_n - sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$

sprendinys. Tada kvadratinei matricai $Y = (X_1|X_2|\dots|X_n)$ teisinga:

$$AY = (AX_1|AX_2|\dots|AX_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Parodysime, kad teisinga ir $YA = I_n$, t.y. matrica $Y = A^{-1}$.

Turime

$$n = \text{rank}I_n = \text{rank}AY \leq \text{rank}Y \leq n.$$

Todėl $\text{rank}Y = n$ ir matricai Y , kaip ir matricai A , galioja mūsų teoremos 5 sąlyga, iš kurios mes turime, kad egzistuoja matrica Z , su kuria $YZ = I_n$.

Tada

$$YA = YAI_n = YAYZ = YI_nZ = YZ = I_n.$$

Irodyta.

$4 \Rightarrow 1.$

Tegu matrica A turi atvirkštinę:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Tada

$$\text{rank}AA^{-1} = \text{rank}I_n = n$$

ir

$$n = \text{rank}AA^{-1} \leq \text{rank}A \leq n,$$

todėl $\text{rank}A = n$ ir matrica A yra neišsigimusi.

Irodyta.

Teorema įrodyta.

7.13 Pratimas. Su kiekviena kvadratine matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

nagrinėkime matricą $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, čia $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} – ma-

tricos A minoras. Skaičių A_{ij} vadiname **adjunktų**, o pačią matricą \tilde{A} – **jungtine** matricai A **matrica**. Pasinaudoję adjunktų savybe

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, & \text{jei } i = j \\ 0, & \text{jei } i \neq j \end{cases},$$

įrodykite, kad $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}$.

PRIEDAS.

Matricų transponavimas.

7.14 Apibrėžimas. Tegu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Matricą $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ vadiname transponuota matrica. Turime $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$.

Matricos transponavimo veiksmas tenkina šias savybes:

T1. $(A + B)^T = A^T + B^T$, kai $A, B \in \mathbf{M}_{m \times n}$.

T2. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$, su visais α .

T3. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, kai $A \in \mathbf{M}_{m \times r}$, $B \in \mathbf{M}_{r \times n}$.

T4. $(A^T)^T = A$.

Kaip pavyzdį įrodysime T3 savybę.

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{u=1}^r (A)_{ju} (B)_{ui} = \\ \sum_{u=1}^r (A^T)_{uj} (B^T)_{iu} &= \sum_{u=1}^r (B^T)_{iu} (A^T)_{uj} = (B^T \cdot A^T)_{ij}. \end{aligned}$$

Įrodyta.

Matricų, turinčių atvirkštines, savybės

7.15 Teiginys. Tegu $A, B \in \mathbf{M}_n$ – matricos, turinčios atvirkštines. Tada:

1. AB – matrica, turinti atvirkštinę, ir $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2. A^{-1} – matrica, turinti atvirkštinę, ir $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. Matrica I_n turi atvirkštinę.

4. Matrica A^T turi atvirkštinę: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Įrodymas.1. $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ ir $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.

2 ir 3. akivaizdu.

$$4. A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n \text{ ir } (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n.$$

Įrodyta.

Algebrinės struktūros: vektorinė erdvė, kūnas

7.16 Apibrėžimas. *Matematinų objektų aibė V , kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba iš skaičiaus, priklausančio \mathbf{R} , ir šie veiksmi tenkina savybes $V1-V8$, vadinama vektorine erdve virš \mathbf{R} .*

Turime, kad matricų aibė $\mathbf{M}_{m \times n}$ yra vektorinė erdvė virš \mathbf{R} . Tuo atveju, kai $m = 1$, sakome, kad turime eilučių vektorinę erdvę $\mathbf{M}_{1 \times n} = \mathbf{R}^n$ (vadiname **aritmetine eilučių vektorine erdve**), o kai $n = 1$, sakome, kad turime stulpelių vektorinę erdvę $\mathbf{M}_{m \times 1} = \mathbf{R}_m$ (vadiname **aritmetine stulpelių vektorine erdve**).

7.17 Apibrėžimas. *Matematinų objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba, ir šie veiksmi tenkina savybes analogiškos savybėms $V1-V4$ ir $S2-S7$ vadinama kūnu.*

Žinime du kūno pavyzdžius: *realiųjų skaičių kūną \mathbf{R} ir racionaliųjų skaičių kūną \mathbf{Q}* . Atkreipkime dėmesį į tai, kad sveikųjų skaičių aibė \mathbf{Z} nėra kūnas, nes joje neišpildyta savybė $S7$.

Diagonaliosios, trikampės ir simetrinės matricos.

7.18 Apibrėžimas. *Kvadratinė matrica*

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

vadinama diagonalia matrica.

Diagonali matrica yra neišsigimusi tada ir tik tada, kada visi įstrižainėje esantys skaičiai nelygūs nuliui: $d_i \neq 0$. Tokios matricos atvirkštinė yra lygi:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Nesudėtingai yra skaičiuojamas diagonalių matricos laipsnis:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}.$$

7.19 Apibrėžimas. *Kvadratinė matrica A , kurios elementai $(A)_{ij} = 0$, kai $i < j$, vadinama viršutine trikampė matrica, o kurios elementai $(A)_{ij} = 0$, kai $i > j$, vadinama apatine trikampė matrica.*

7.20 Pavyzdys.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

viršutinė trikampė matrica apatinė trikampė matrica

7.21 Teorema.

(1) *Jei A yra viršutinė trikampė matrica, tai A^T - apatinė trikampė matrica ir atvirkščiai: jei A yra apatinė trikampė matrica, tai A^T - viršutinė trikampė matrica.*

(2) *Jei A ir B yra apatinės trikampės matricos, tai ir AB yra apatinė trikampė matrica. Jei A ir B yra viršutinės trikampės matricos, tai ir AB yra viršutinė trikampė matrica.*

(3) *Jei A yra neišsigimusi apatinė trikampė matrica, tai A^{-1} yra apatinė trikampė matrica. Jei A yra neišsigimusi viršutinė trikampė matrica, tai A^{-1} yra viršutinė trikampė matrica.*

Įrodymą paliekame skaitytojui.

7.22 Pavyzdžiai. Nagrinėkime viršutines trikampes matricas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Tada

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{11}{15} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

7.23 Apibrėžimas. Kvadratinė matrica A , kurioje $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, vadinama simetrine matrica.

4.24 Pavyzdys.

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 1 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

7.25 Teorema. Tegū A, B yra tos pačios eilės simetrinės matricos, o $\alpha \in R$. Tada

- (1) A^T – simetrinė matrica.
- (2) $A+B$ ir $A-B$ yra simetrinės matricos
- (3) αA yra simetrinė matrica.
- (4) AB simetrinė matrica tada ir tik tada, kai $AB=BA$.
- (5) Jei A yra neišsigimusi, tai A^{-1} yra simetrinė matrica.

7.26 Pavyzdys.

Nekomutatyvių simetrinių matricų sandauga nėra simetrinė matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Komutatyvių simetrinių matricų sandauga yra simetrinė matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}.$$

7.27 Išvada. *Tos pačios eilės simetrinės matricos sudaro vektorinę erdvę virš \mathbf{R} .*

Pastebėkime, kad su visomis matricomis (nebūtinai kvadratinėmis) A matricos AA^T ir $A^T A$ yra simetrinės matricos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 37 & -1 & -17 \\ 37 & 53 & 34 & -17 \\ -1 & 34 & 61 & 0 \\ -17 & -17 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 25 & 16 \\ 25 & 99 & 1 \\ 16 & 1 & 53 \end{pmatrix}.$$

7.28 Teorema. *Jei A yra neišsigimusi matrica, tai AA^T ir $A^T A$ yra taip pat neišsigimusi matrica.*

Įrodymas paliekamas skaitytojui.