Tiesinė algebra ir geometrija informatikams. Paskaitų konspektas.

Rimantas Grigutis

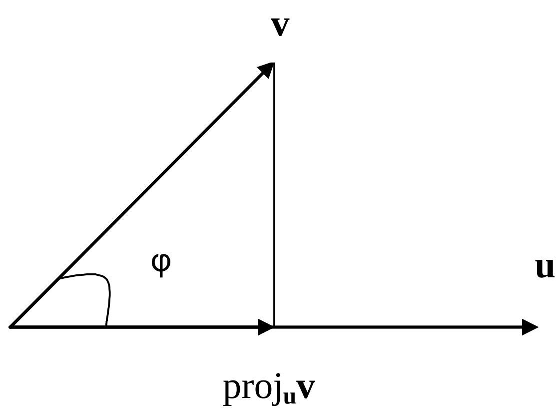
6 paskaita. *Vektoriai erdvėje. Vektorių vektorinė sandauga, savybės. Trijų vektorių mišrioji sandauga, savybės. Vektoriaus koordinatės bazės atžvilgiu.*

6.1 Apibrėžimas. *Vektorių erdvėje* $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$ *skaliarinė sandauga yra skaičius* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ *apibrėžtas formule*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|\cos\varphi,$$

čia $\|\mathbf{u}\|$ *ir* $\|\mathbf{v}\|$ *vektorių* u *ir* v *ilgiai, o* φ *kampas tarp vektorių.*

Pastebėkime, kad skaičius $\|\mathbf{v}\|\cos\varphi$ yra *vektoriaus* $\mathbf{v}$ *projekcijos* į vektorių $\mathbf{u}$ ilgis, o pati projekcija yra vektorius $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$:



Analogiškai $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$.

Tegu $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}-$ vienetiniai vektoriai Dekarto koordinatinėse ašyse Ox, Oy, Oz. Tada vektoriaus $\mathbf{u}$ *Dekarto koordinatėmis* vadiname skaičius:

$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{i}}\mathbf{u}\|=\mathbf{u}\cdot\mathbf{i}=u_1,$$
$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{j}}\mathbf{u}\|=\mathbf{u}\cdot\mathbf{j}=u_2,$$
$$\|\mathrm{proj}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}\|=\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}=u_3$$

Tada patį vektorių $\mathbf{u}$ galima užrašyti taip:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}.$$

Taigi turime

$$u_1 = \|u\|\cos\varphi_1,\ u_2 = \|u\|\cos\varphi_2,\ u_3 = \|u\|\cos\varphi_3,$$

čia $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ yra vektoriaus $\mathbf{u}$ kampai su koordinačių ašių Ox, Oy, Oz teigiamomis kryptimis. Beto,

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{u}\|\cos 0\\
u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\mathbf{u}\|^2\\
(\|u\|\cos\varphi_1)^2 + (\|u\|\cos\varphi_2)^2 + (\|u\|\cos\varphi_3)^2 = \|\mathbf{u}\|^2\\
\|\mathbf{u}\|^2(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3) = \|\mathbf{u}\|^2\\
\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.
\end{gathered}$$

Vektorių vektorinė sandauga, savybės.

Taikant vektorius geometrijoje, fizikoje ir kitur dažnai tenka nagrinėti vektorius statmenus duotiems dviems vektoriams. Mes parodysime kaip galima būtų apibrėžti tokį vektorių.

6.2 Apibrėžimas. *Tegu* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *ir* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *yra vektoriai 3-matėje* $xyz-$*erdvėje. Vektorius*

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

vadinamas vektorių $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$ *vektorine sandauga.*

6.3 Pastaba. *Vektoriaus* $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *koordinatės yra*:

$$\begin{gathered}
\mathbf{u}\times\mathbf{v} =\\
\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3\\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3\\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2\\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) =\\
(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)
\end{gathered}$$

Pastebėkime, kad vektoriaus skaliarinė sandauga yra skaičius, o vektorinė sandauga - vektorius. Parodysime šių sandaugų tarpusavio ryšį.

6.4 Teorema. *Tegu* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *yra vektoriai 3-matėje* $xyz-$*erdvėje. Tada*

1) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonalus* $\mathbf{u}$)
2) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ ($\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *ortogonalus* $\mathbf{v}$)
3) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$ (*Lagrange lygybė*)
4) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$
5) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u}$

Įrodymas paliekamas skaitytojui.

Pateiksime pagrindines vektorinės sandaugos savybes.

6.5 Teorema. *Tegu* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ *yra vektoriai 3-matėje* $xyz-$*erdvėje. Tada*

1) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
5) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Įrodymas paliekamas skaitytojui.

6.6 Išvada.Ašinių vektorių $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vektorinės sandaugos lentelė:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}.$$

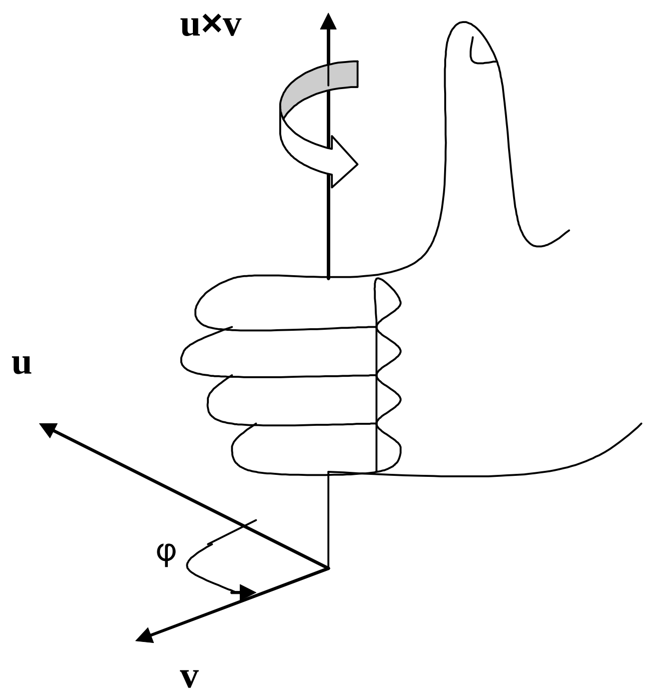
6.7 Teorema (geometrinė vektorinės sandaugos prasmė).

1) Vektorių $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$ *vektorinės sandaugos ilgis yra lygus lygiagretainio, kurio kraštinės yra* $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$, *plotui:*

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin\varphi,$$

čia $\varphi-$ *kampas tarp* $\mathbf{u}$ *ir* $\mathbf{v}$.

2) Vektorių **u** *ir* **v** *vektorinė sandauga yra vektorius statmenas plokštumai, kurioje yra vektoriai* **u** *ir* **v**, *ir nukreiptas taip, kad, žiūrint iš jo galo, sukant vektorių* **u** *vektoriaus* **v** *link mažiausiu kampu, sukama bus prieš laikrodžio rodyklę.*



Įrodymas. Pasinaudokite Lagrange lygybe.

6.8 Apibrėžimas. *Tegu* **u**, **v**, **w** *yra vektoriai 3-matėje* $xyz-$*erdvėje. Tada skaičių*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

vadina trijų vektorių **u**, **v**, **w** **mišriąja sandauga** *ir kartais žymi* $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$.

Tegu $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ yra vektoriai 3-matėje $xyz-$erdvėje. Tada teisinga

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3\\ w_2 & w_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} v_1 & v_3\\ w_1 & w_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} v_1 & v_2\\ w_1 & w_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

6.9 Teorema (mišriosios sandaugos savybės ir geometrinė prasmė).
1) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$.

2) Vektorų $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *mišriosios sandaugos absoliuti reikšmė* $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$ *yra lygi gretasienio, kurio kraštinėmis yra vektoriai* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, *tūriui.*

3) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = 0$ *tada ir tik tada, kai vektoriai* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ *yra komplanarūs (yra vienoje plokštumoje).*

4) Piramidės, kurios briaunomis yra vektoriai $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, *tūris yra* $\frac{1}{6}|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$.

6.10Apibrėžimas *Tris nenuliniai nekomplanarūs vektoriai* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$) *vadinami erdvės baze.*

6.11Teorema. *Bet kuris vektorius* $\mathbf{u}$ *vienareikšmiškai reiškiamas baze* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$*:*

$$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Skaičiai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *vadinami vektoriaus* $\mathbf{u}$ *koordinatėmis bazėje* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Įrodymas. *Vienatinumas.*
Tegu turime dar vieną vektoriaus $\mathbf{u}$ reiškimą baze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{u} = \lambda_1'\mathbf{e}_1 + \lambda_2'\mathbf{e}_2 + \lambda_3'\mathbf{e}_3.$$

Turime

$$(\lambda_1 - \lambda_1')\,\mathbf{e}_1 + (\lambda_2 - \lambda_2')\,\mathbf{e}_2 + (\lambda_3 - \lambda_3')\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Padauginkime šią lygybę skaliariškai iš vektoriaus $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$:

$$(\lambda_1 - \lambda_1')\,(\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)) = \mathbf{0}.$$

Turime $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$, todėl $\lambda_1 - \lambda_1' = 0$ ir $\lambda_1 = \lambda_1'$. Analogiškai parodoma, kad $\lambda_2 = \lambda_2'$ ir $\lambda_3 = \lambda_3'$.

Egzistavimas. Turime, kad

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix},$$

čia $e_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $e_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $e_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ - vektorių Dekarto koordinatės.

Tada

$$u = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} =$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} =$$

$$\tfrac{1}{\det A} (u_1 A_{11} + u_2 A_{12} + u_3 A_{13}, u_1 A_{21} + u_2 A_{22} + u_3 A_{23}, u_1 A_{31} + u_2 A_{32} + u_3 A_{33}) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\det A} \left(\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} (u \cdot (e_2 \times e_3), u \cdot (e_3 \times e_1), u \cdot (e_1 \times e_2)) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{u \cdot (e_2 \times e_3)}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} e_1 + \frac{u \cdot (e_3 \times e_1)}{e_2 \cdot (e_3 \times e_1)} e_2 + \frac{u \cdot (e_1 \times e_2)}{e_3 \cdot (e_1 \times e_2)} e_3.$$

Įrodyta.