Algebra ir geometrija informatikams. Paskaitų konspektas.

Rimantas Grigutis

6 paskaita *Tiesinės lygčių sistemos(Gauso metodas)*

Tiesinių lygčių sistema vadiname sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21} + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

čia $a_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, yra skaičiai.

Skaičių $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ seka vadinama sistemos (1) sprendiniu, jei

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}.$$

Su kiekviena tiesinių lygčių sistema yra vienareikšmiškai susietos dvi matricos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ši matrica vadinama tiesinės lygčių *sistemos* (1) *matrica*;

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ši matrica vadinama tiesinių lygčių sistemos (1) *išplėstąja matrica.*

6.1 Apibrėžimas. *Tiesinių lygčių sistema turinti bent vieną sprendinį vadinama suderinta, priešingu atveju - nesuderinta. Dvi tiesinės lygčių sistemos vadinamos ekvivalenčiomis, jei šių sistemų sprendinių aibės sutampa.*

Spręsdami tieisinių lygčių sistemas mes pertvarkome šiose sistemose esančias lygtis taip, kad nekistų sistemos sprendinių aibė. Paprasčiausi tokie pertvarkių veiksmai vadinami *elementariais tiesinių lygčių sistemos pertvarkiais.* Jų yra trys:

1. i - osios ir j -osios lygčių keitimas vietomis.
2. i -osios lygties daugyba iš nenulinio skaičiaus.
3. j -osios lygties, padaugintos iš skaičiaus, pridėtis prie i -osios lygties.

Visiškai taip pat yra apibrėžiamis *elementarūs tiesinių lygčių sistemos matricų A ir B pertvarkiai:*

1. i - osios ir j -osios eilučių keitimas vietomis
2. i -osios eilutės daugyba iš nenulinio skaičiaus
3. j -osios eilutės, padaugintos iš skaičiaus, pridėtis prie i -osios eilutės:

6.2 Teiginys. *Elementarūs tiesinių lygčių sistemos pertvarkiai nekeičia sistemos sprendinių aibės.*

Be įrodymo.

6.3 Apibrėžimas. Nulinė matrica O

$$O=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ir *matrica*

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} & & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & & j_r & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & \mathbf{1} & & & & & & & & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} & & & & * & & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & & & & & \\
0 & \cdots & & & & & 0 & \mathbf{1} & & & \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & & \cdots & & & & \cdots & & & & \\
0 & \cdots & & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array},$$

čia

$$\begin{gathered} \textit{1)}\ 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_r \le n; \\ \textit{2)}\ a_{1j_1} = a_{2j_2} = \cdots = a_{rj_r} = 1; \\ \textit{3)}\ a_{is_i} = 0,\ \textit{jei}\ s_i < j_i\ ,\ 1 \le i \le r; \\ \textit{4)}\ a_{ti} = 0,\ \textit{jei}\ t > r,\ 1 \le i \le n, \end{gathered}$$

vadinamos **laiptuotomis matricomis**.

6.4 Pavyzdys. Matricos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yra laiptuotos matricos,
o matrica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nėra laiptuota matrica.

6.5 Pavyzdys. Nesunku matyti, kad jeigu A yra laiptuota matrica, tai $\begin{pmatrix} O & | & A \end{pmatrix}$ ir $\begin{pmatrix} 1 & | & * \\ O & | & A \end{pmatrix}$, čia O - nulinis stulpelis turintis tiek eilučių kiek ir matrica A, yra laiptuotos matricos.

6.6 Teorema (C.F.Gauss). *Kiekvieną matricą A elementariaisiais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuotos matricos, kurią vadiname laiptuotu matricos A pavidalu.*

Įrodymas. Matematinė indukcija pagal matricos A stulpelių skaičių n.
1. *Indukcijos bazė*: $n = 1$.
Tegu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Galimi du atvejai.
(a) $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{m1} = 0 \Rightarrow$ matrica $A-$ laiptuota matrica.
(b) Egzistuoja toks $i, 1 \leq i \leq m$, kad $a_{i1} \neq 0$. Tada atlikime šiuos elementarius pertvarkius su matricos A eilutėmis:
1) sukeisime pirmąją ir $i-$ ąją eilutes vietomis;

2) pirmąją eilutę daljame iš a_{i1},

3) pirmąją eilutę padaugintą iš $-a_{j1}$ pridedame prie $j-$ osoios eilutės, $2 \leq j \leq m$ ir $j \neq i$; ir pirmąją eilutę padaugintą iš $-a_{11}$ pridedame prie $i-$ osios eilutės.

Gausime laiptuotą matricą $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. *Indukcijos prielaida*: matricą, turinčią mažiau nei n stulpelių galima suvesti prie laiptuoto pavidalo.

3. *Indukcijos teiginys*. Tegu matricoje A yra n stulpelių. Galimi du atvejai:

1) Matricos pirmasis stulpelis yra nulinis:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \cdots & B \\ 0 & \end{array} \right).$$

Tada matricoje B yra $n-1$ stulpelis ir pagal indukcijos prielaidą matricą B elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuoto pavidalo B'. Tada ir matricą A tais pačiais elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuotos matricos

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \cdots & B' \\ 0 & \end{array} \right).$$

2) Matricos A pirmasis stulpelis nėra nulinis. Neapribojant bendrojo atvejo, tegu $a_{11} \neq 0$ (jei $a_{11} = 0$, bet $a_{i1} \neq 0$, tai sukeiskime pirmąją ir $i-$ ąją eilutes vietomis). Tada atlikime šiuos elementarius pertvarkius su matricos A eilutėmis:

1) pirmąją eilutę dalijame iš a_{11},

2) pirmąją eilutę padaugintą iš $-a_{j1}$ pridedame prie $j-$ osios eilutės, $2 \leq j \leq m$.

Gausime matricą:

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ O & B \end{array} \right).$$

Matricoje B yra $n-1$ stulpelis, todėl pagal indukcijos prielaidą matricą B elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuoto pavidalo B'. Tada ir matricą A tais pačiais elementariais pertvarkiais galima suvesti prie laiptuotos matricos

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & | & * \\ O & | & B' \end{pmatrix}.$$

Įrodyta.

Tiesinių lygčių sistemos (1) *sprendimas Gauss'o metodu.*

Gauso teoremos dėka mes tiesinių lygčių sistemos (1) išplėstąjai matricai (2) randame laiptuotą pavidalą:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_r & & n & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \cdots & \mathbf{1} & & & & & & & & c_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} & & & * & & & c_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \mathbf{1} & & & & c_r \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{r+1} \\ \cdots & & \cdots & & & \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Šį laiptuotą pavidalą atitinkanti tiesinių lygčių sistema yra

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_{1j_1}+ & & & \cdots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ & x_{2j_2}+ & & \cdots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ & & & \cdots & & & \\ & & x_{rj_r}+ & \cdots & +a_{rn}x_n & = & c_r \\ & & & & 0 & = & c_{r+1} \end{array} \right. \qquad (3)$$

6.7 Apibrėžimas.*Sistemoje* (3) *kintamieji* $x_{1j_1}, x_{2j_2}, ..., x_{rj_r}$ *vadinami laiptuose esančias kintamaisiais, o likusieji - laiptuose nesančiais kintamaisiais.*

Norėdami rasti sistemos sprendinius galime gauti vieną iš trijų atvejų:

1. $c_{r+1} \neq 0$. Šiuo atveju gauta sistema yra nesuderinta nesuderinta.

2. $c_{r+1} = 0$ ir $r = n$. Šiuo atveju sistema turi vieną sprendinį: $x_n = c_n, x_{n-1} = c_{n-1} - a_{n-1,n}c_n, ..., x_1 = c_1 - a_{1n}c_n - \cdots$.

3. $c_{r+1} = 0$ ir $r < n$. Šiuo atveju sistema turi be galo daug sprendinių: visus laiptuose esančius kintamuosius $x_{1j_1}, ..., x_{rj_r}$ galima išreikšti laiptuosenesančiais kintamaisiais: $x_{rj_r} = c_r - a_{rj_r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n$, ...

6.8 Apibrėžimas. *Matricos A laiptuotame pavidale esančių laiptų skaičių vadiname matricos A* ***rangu:*** *rank*$A = r$.

Vėliau matysime, kad matricos rango apibrėžimas yra korektiškas, t.y. matricos A laiptuotame pavidale laiptų skaičius yra apibrėžiamas pačia matrica A ir nepriklauso nuo elementarių matricos A pertvarkių.

6.9 Teorema (L.Kronecker-A.Capelli). *Tiesinių lygčių sistema* (1) *yra suderinta tada ir tik tada, kai sistemos matricos rangas lygus išplėstosios matricos rangui*: rank$A$ =rank$B$.

Be įrodymo.

6.10 Išvados. 1. Jei tiesinių lygčių sistema (1) yra suderinta ir sistemos matricos rangas yra lygus sistemoje esančių kintamųjų skaičiui: rank$A = n$, tai sistema turi vienintėlį sprendinį.
2. Jei tiesinių lygčių sistema (1) yra suderinta ir sistemos matricos rangas yra mažesnis negu sistemoje esančių kintamųjų skaičius: rank$A < n$, tai sistema turi be galo daug sprendinių.

6.11 Apibrėžimas. *Tiesinių lygčių sistema* (1) *vadinama homogenine tiesinių lygčių sistema, jei* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Pastebėsime, kad
1. Homogeninė tiesinių lygčių sistema visada suderinta.
2. Homogeninė tiesinių lygčių sistema turi be galo daug sprendinių tada ir tik tada, kai sistemos matricos rangas yra mažesnis negu sistemoje esančių kintamųjų skaičius: rank$A < n$.

3. Homogeninė tiesinių lygčių sistema turi vieną sprendinį $\mathrm{x}_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ tada ir tik tada, kada sistemos matrica A yra kvadratinė ir jos rangas yra lygus n: rank$A = n$.

6.12 Apibrėžimas. *Kvadratinė matrica* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, *kurios rank*$A = n$, *vadinama neišsigimusia.*

6.13 Teorema. *Kvadratinė matrica A yra neišsigimusi tada ir tik tada, kai*

$\det A \neq 0$.

Įrodymas. Tegu matricos A laiptuotas pavidalas B yra gaunamas šių elementariųjų pertvarkių: 1) pertvarkių, keičiančių eilutes vietomis:$P_1, ..., P_u$; 2) pertvarkių, dauginačių kurią nors matricos eilutę iš $\alpha_i \neq 0 : P_{\alpha_1}, ..., P_{\alpha_v}$; 3) pertvarkių, pridedančių prie vienos eilutės kitą, padaugintą iš nenulinio skaičiaus: $Q_1, ..., Q_t$. Tada turime:

$$\det B = (-1)^u \, \alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_v \det A.$$

Tada teiginį įrodo šių ekvivalentumų seka:

$$\begin{gathered} A- \text{ neišsigimusi} \\ \Leftrightarrow \text{rank} A = n \\ \Leftrightarrow \text{rank} B = n \\ \Leftrightarrow \det B \neq 0 \\ \Leftrightarrow \det A \neq 0. \end{gathered}$$

Įrodyta.

Išvada. *Tiesinių lygčių sistema, kurios matrica A yra kvadratinė, turi vienintėlį sprendinį tada ir tik tada* $\det A \neq 0$.