Tiesinė algebra ir geometrija bioinformatikams. Paskaitų konspektas

Rimantas Grigutis

4 paskaita *Matricos.*

4.1 Apibrėžimas. *Matrica A yra m eilučių ir n stulpelių turinti stačiakampė lentelė su joje įrašytais skaičiais $a_{ij}, 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix},$$

čia skaičius a_{ij} yra matricos A i- oje eilutėje ir j- ame stulpelyje. Skaičių a_{ij} žymėsime ir taip : $a_{ij} = (A)_{ij}$.

Visų matricų, turinčių m eilučių ir n stulpelių , aibę žymėsime $\mathbf{M}_{m\times n}$. Sakysime, kad dvi matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ iš $\mathbf{M}_{m\times n}$ yra lygios, $A = B$, jei $a_{ij} = b_{ij}$ su visais i ir j.

Matricų aibėje $\mathbf{M}_{m\times n}$ yra apibrėžiami šie *veiksmai*: matricų sudėtis, *matricos daugyba iš skaičiaus, matricų daugyba.*

Matricų sudėtis:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \text{ t.y. } (A + B)_{ij} = (A)_{ij}.$$

*Matricos daugyba iš skaičiaus***:**

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}), \text{ t.y. } (\alpha A)_{ij} = \alpha (A)_{ij}.$$

4.2 Apibrėžimas.
1) *Matricos A priešinga matrica vadinsime matricą $(-1) \cdot A = -A$.*
2) Nuline matrica vadinsime matricą

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Matricų aibėje $\mathbf{M}_{m\times n}$, kurioje apibrėžti sudėties ir daugybos iš skaičiaus veiksmai, yra teisingos šios savybės(čia $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}-$ skaičiai, $A, B, C \in \mathbf{M}_{m\times n}$):

V1.(sudėties asociatyvumas) $(A+B)+C = A+(A+C)$.

V2.(sudėties komutatyvumas) $A+B = B+A$.

V3.(nulinės matricos egzistavimas) $O+A = A$.

V4.(priešingos matricos egzistavimas) $A+(-A) = O$.

V5. $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})A = \boldsymbol{\alpha}A+\boldsymbol{\beta}A$.

V6. $\boldsymbol{\alpha}(A+B) = \boldsymbol{\alpha}A+\boldsymbol{\alpha}B$.

V7. $(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})A = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}A)$.

V8. $1\cdot A = A$.

4.3 Apibrėžimas. *Tegu* $A_1, ..., A_s \in M_{m\times n}$, *o* $\alpha_1, ..., \alpha_s-$ *skaičiai. Matricą* $\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_s A_s$ *vadina matricų* $A_1, ..., A_s$ *tiesine kombinacija.*

Parodysime kaip tiesinių lygčių sistemą reikšti stulpelių tiesine kombinacija.

Tegu turime tiesinių lygčių sistemą

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. . \qquad (1)$$

Pažymėkime stulpelius:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, ..., A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Tada tiesinių lygčių sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = B.$$

Taigi, norint išspręsti tiesinių lygčių sistemą (1) reikia stulpelį B išreikšti stulpelių $A_1, A_2, ..., A_n$ tiesine kombinacija.

Matricų sandauga.

4.4 Apibrėžimas. *Matricų* A *ir* B *sandauga* $A\cdot B = AB$ *apibrėžiama tik tada, kai matricos* A *stulpelių skaičius sutampa su matricos* B *eilučių skaičiumi. Jeigu* $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times n}$ *ir* $B = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{n\times r}$, *tai matrica* $AB \in \mathbf{M}_{m\times r}$ ir

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} (A)_{is} (B)_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

4.5 Pavyzdžiai.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 10 & 0 \end{pmatrix}.$

2) Sandauga $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ neapibrėžta.

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 41 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 19 & 34 \end{pmatrix}.$

Matome, kad matricų sandauga ne visada apibrėžta, o net kai apibrėžta - ne visada komutatyvi (3),4) pavyzdžiai).

Tiesinų lygčių sistemą (1) galima užrašyti ir taip:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matricų sandaugos savybės:

S1. $\boldsymbol{\alpha} (AB) = (\boldsymbol{\alpha} A) B = A (\boldsymbol{\alpha} B)$.
S2.(sandaugos asociatyvumas) $(AB) C = A (BC)$.
S3. (distributyvumas) $(A + B) C = AC + BC$.
S4. (distributyvumas) $D (A + B) = DA + DB$.

4.6 Sandaugos asociatyvumo įrodymas.

Jeigu lygybės $(AB) C = A (BC)$ abi pusės yra apbrėžtos, tai $A \in \mathbf{M}_{m\times n}, B \in \mathbf{M}_{n\times r}, C \in \mathbf{M}_{r\times s}$. Tada $AB \in \mathbf{M}_{m\times r}$, $(AB) C \in \mathbf{M}_{m\times s}$ ir $BC \in \mathbf{M}_{n\times s}$, $A (BC) \in \mathbf{M}_{m\times s}$. Taigi matricos $(AB) C$ ir $A (BC)$ yra to pačio dydžio. Turime

$$((AB)\,C)_{ij} = \sum_{u=1}^{r} (AB)_{iu} \cdot (C)_{uj} = \sum_{u=1}^{r} \left(\sum_{v=1}^{n} (A)_{iv} \, (B)_{vu} \right) \cdot (C)_{uj} =$$
$$\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}} \left(\sum_{v=1}^{n} ((A)_{iv} \, (B)_{vu}) \cdot (C)_{uj} \right) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \left(\sum_{u=1}^{r} (A)_{iv} \cdot \left((B)_{vu} \, (C)_{uj} \right) \right) =$$
$$\sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \left((A)_{iv} \cdot \sum_{u=1}^{r} \left((B)_{vu} \, (C)_{uj} \right) \right) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \left((A)_{iv} \cdot (BC)_{vj} \right) = (A\,(BC))_{ij} \,.$$

Čia pasinaudojome skaičių distributyvumo savybe:

$$\sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}} \sum_{v=1}^{n} d_{uv} = \sum_{\mathbf{u=1}}^{\mathbf{r}} (d_{u1} + d_{u2} + \cdots + d_{un}) =$$
$$(d_{11} + d_{12} + \cdots + d_{1n}) + (d_{21} + d_{22} + \cdots + d_{2n}) + \cdots + (d_{r1} + d_{r2} + \cdots + d_{rn}) =$$
$$(d_{11} + d_{21} + \cdots + d_{r1}) + (d_{12} + d_{22} + \cdots + d_{r2}) + \cdots + (d_{1n} + d_{2n} + \cdots + d_{rn}) =$$
$$\sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} (d_{1v} + d_{2v} + \cdots + d_{rv}) = \sum_{\mathbf{v=1}}^{\mathbf{n}} \sum_{u=1}^{r} d_{uv}.$$

Įrodyta.

Paaiškinsime matricų sandaugos veiksmo apibrėžimą tiesininių keitinių kompozicijos veiksmu. Tegu turime du tiesinius kintamųjų keitinius:

$$\begin{array}{c} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \dotfill \\ y_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_k + \cdots + b_{kn}x_n \end{array}$$

ir

$$\begin{array}{c} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1k}y_k \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2k}y_k \\ \dotfill \\ z_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mk}y_k \ . \end{array}$$

Užrašykime šiuos keitinius matricomis:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_k \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ ir } \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_k \end{pmatrix},$$

čia $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{m\times k}$ ir $B = (b_{ij}) \in \mathbf{M}_{k\times n}$ - keitinių matricos.

Tada tiesinio keitinio

$$\begin{aligned} z_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_n \\ z_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mk}x_n \end{aligned}$$

matrica $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$ yra lygi AB :

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_m \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = AB \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

4.7 Apibrėžimas. *Kvadratinė matrica* $I_n = (\delta_{ij}) \in \mathbf{M}_{n\times n}$, $\delta_{ij} = \left[\begin{array}{l} 1, \text{ kai } i = j \\ 0, \text{ kai } i \neq j \end{array} \right.$ *vadinama* $n-$ *osios eilės vienetine matrica:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

4.8 Teiginys. *Su visomis matricomis* $A \in M_{n\times m}$ *teisingos lygybes:*

$$A \cdot I_m = I_n \cdot A = A \ .$$

Kvadratinių matricų aibė $\mathbf{M}_n$ *kaip realiųjų skaičių aibės plėtinys.*

Kvadratinių matricų aibėje $\mathbf{M}_{n\times n} = \mathbf{M}_n$ yra apibrėžtos šios operacijos: matricų suma, matricos sandauga iš skaičiaus ir matricų sandauga. Šių operacijų atžvilgiu teisingos *V1-V8*; *S1-S4* savybės.Iš 4.8 teiginio turime, kad teisinga ir dar viena savybė

S5 (vienetinės matricos egzistavimas). $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ su visomis $A \in \mathbf{M}_n$

Žinome, kad realiųjų skaičių aibėje $\mathbf{R}$ taip pat yra teisingos *V1-V8*; *S1-S4* savybės. Ir tai nėra atsitiktinumas, nes skaičių aibės $\mathbf{R}$ ir matricų aibės $\{\alpha \cdot I_n \in \mathbf{M}_n \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ yra abipus vienareikšmis(bijektyvus) ryšis(funkcija) apibrėžtas formule

$$f(\alpha) = \alpha \cdot I_n$$

Tikrai, jei $f(\alpha) = f(\beta)$, tai $\alpha \cdot I_n = \beta \cdot I_n$ ir $\alpha = \beta$.
Beto ši funkcija "*išlaiko operacijas*":

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$$
$$f(\alpha \cdot \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$$

su visais α,$\beta \in \mathbf{R}$.
Tikrai

$$f(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \cdot I_n = \alpha \cdot I_n + \beta \cdot I_n = f(\alpha) + f(\beta)$$

ir

$$f(\alpha\beta) = (\alpha\beta) \cdot I_n = \alpha(\beta \cdot I_n) = (\alpha \cdot I_n) \cdot (\beta \cdot I_n) = f(\alpha) \cdot f(\beta).$$

Žiūrėdami į realiuosius skaičius α kaip į matricas $\alpha \cdot I_n$, suprantame, kad aibė $\mathbf{R}$ yra matricų aibės $\mathbf{M}_n$ poaibis:

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{M}_n.$$

Tačiau $\mathbf{R}$ nėra paprastas $\mathbf{M}_n$ poaibis, nes abiejose aibėse yra panašiai apibrėžiamos pagrindinės operacijos. Šį panašumą mes išreiškėme apibrėždami operacijas išlaikančią abipus vienareikšmišką funkciją f. Beto abiejose aibėse teisingos *V1-V8*; *S1-S4* savybės. Galima sakyti, kad matricų aibė $\mathbf{M}_n$ paveldi skaičių aibės $\mathbf{R}$ savybes. Bet ar visas? Jau žinome, kad tikrai ne. Juk skaičiams būdingas sandaugos komutatyvumas:

S6.(sandaugos komutatyvumas) Su visais a ir $\beta \in \mathbf{R}$ teisinga $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}'$

negalioja matricų aibėje $\mathbf{M}_n$. Taigi praplėtus skaičių aibę $\mathbf{R}$ matricų aibe $\mathbf{M}_n$ prarandamas sandaugos komutatyvumas.

Ir tai dar ne viskas. Prisiminkime, kad kiekvienas *nenulinis* aibės $\mathbf{R}$ skaičius α turi atvirkštinį:

7S.(atvirkštinio elemento egzistavimas)Su visais $\boldsymbol{\alpha} \in R, \boldsymbol{\alpha} \neq 0$ egzistuoja atvirkš- tinis skaičius: $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$, toks, kad $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\alpha}^{-1}) = 1$.

Atvirkštinio skaičiaus egzistavimas įgalina aibėje $\mathbf{R}$ apibrėžti dalybos operaciją iš nenulinio skaičiaus, o tuo pačiu ir tiesinės lygties $\alpha x = \beta$ sprendimą, kai $\alpha \neq 0$.

Ar matricų aibė $\mathbf{M}_n$ paveldi šią savybę. Atsakymas - ne. Bet yra nemažai matricų, kurios turi atvirkštines. Išnagrinėkime šį klausimą.

4.9 Apibrėžimas(atvirkštinės matricos apibrėžimas) *Sakome, kad kvadratinė matrica $A \in \mathbf{M}_n$ turi atvirkštinę matricą, jeigu egzistuoja tokia kvadratinė matrica $B \in \mathbf{M}_n$, kad*

$$AB = BA = I_n.$$

Matricos A atvirkštinę matricą žymi A^{-1}.

4.10 Teiginys (atvirkštinės matricos vienatinumas). Jeigu B ir C yra matricos A atvirkštinės, tai $B = C$.

Įrodymas.Tegu matricos B ir C yra matricos A atvirkštinės:

$$AB = BA = I_n \text{ ir } AC = CA = I_n.$$

Tada

$$B = BI_n = B\,(AC) = (BA)\,C = I_nC = C$$

Įrodyta.

4.11 Teorema(matricų turinčių atvirkštines požymiai)

Tegu $A \in \mathbf{M}_n$. Visos žemiau pateiktos sąlygos yra ekivalenčios.

1. *Matrica A - neišsigimusi.*

2. *Homogeninių tiesinių lygčių sistema $AX = O$ turi vienintėlį sprendinį. Čia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ir $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$.*

3. $\det A \neq 0$.

4. *Matrica A turi atvirkštinę matricą.*

5. *Su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.*

Prieš įrodant šią teoremą be įrodymo suformuluosime teiginį, kuriuo pasinaudosime teoremos įrodyme.

4.12 Teiginys. *Tegu matricos A ir B tokios, kad apibrėžta AB. Tada*

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}A,$$
$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}B.$$

4.11 Teoremos įrodymas. Jau aukščiau matėme, kad $1 \Leftrightarrow 2$ (3 paskaitos 3.10 išvada) ir $1 \Leftrightarrow 3$ (praeitos paskaitos teiginys).

Dabar įrodysime teiginius tokia tvarka $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 5$.

Turime, kad $\text{rank}A = n$. Tada

$$n = \text{rank}A \leq \text{rank}(A|B) \leq n.$$

Todėl

$$\text{rank}A = \text{rank}(A|B) = n$$

ir pagal Kroneckerio-Capellio 3.9 teoremą tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Įrodyta.

$5 \Rightarrow 4$.

Turime, kad su kiekvienu stulpeliu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tiesinių lygčių sistema $AX = B$ suderinta.

Tegu stulpelis X_1 yra sistemos $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys, stulpelis X_2 - sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sprendinys ,..., stulpelis X_n - sistemos $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$ sprendinys. Tada kvadratinei matricai $Y = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$ teisinga:

$$AY = (AX_1|AX_2|\cdots|AX_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Parodysime, kad teisinga ir $YA = I_n$, t.y. matrica $Y = A^{-1}$.

Turime

$$n = \text{rank} I_n = \text{rank} AY \leq \text{rank} Y \leq n.$$

Todėl rank$Y = n$ ir matricai Y, kaip ir matricai A, galioja mūsų teoremos 5 sąlyga, iš kurios mes turime, kad egzistuoja matrica Z, su kuria $YZ = I_n$.

Tada

$$YA = YAI_n = YAYZ = YI_nZ = YZ = I_n.$$

Irodyta.

$4 \Rightarrow 1$.

Tegu matrica A turi atvirkštinę:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Tada

$$\text{rank} AA^{-1} = \text{rank} I_n = n$$

ir

$$n = \text{rank} AA^{-1} \leq \text{rank} A \leq n,$$

todėl rank$A = n$ ir matrica A yra neišsigimusi.

Irodyta.

Teorema įrodyta.

4.13 Pratimas. Su kiekviena kvadratine matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ nagrinėkime matricą $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, čia $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $M_{ij}-$ matricos A minoras. Skaičių A_{ij} vadiname **adjunktu**, o pačią matricą $\tilde{A}$ - **jungtine** matricai A **matrica.** Pasinaudoję adjunktų savybe

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \left[\begin{array}{c} \det A, \text{ jei } i = j \\ 0, \text{ jei } i \neq j \end{array} \right. ,$$

įrodykite, kad $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$.

PRIEDAS.

Matricų transponavimas.

4.14 Apibrėžimas. *Tegu* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. *Matricą* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *vadiname transponuota matrica. Turime* $\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}$.

Matricos transponavimo veiksmas tenkina šias savybes:

T1. $(A+B)^T = A^T + B^T$, kai $A, B \in \mathbf{M}_{m\times n}$.
T2. $(\boldsymbol{\alpha} A)^T = \boldsymbol{\alpha} \cdot A^T$, su visais $\boldsymbol{\alpha}$.
T3. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$, kai $A \in \mathbf{M}_{m\times r}$, $B \in \mathbf{M}_{r\times n}$.
T4. $\left(A^T\right)^T = A$.

Kaip pavyzdį įrodysime T3 savybę.

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{u=1}^{r} (A)_{ju} (B)_{ui} =$$
$$\sum_{u=1}^{r} \left(A^T\right)_{uj} \left(B^T\right)_{iu} = \sum_{u=1}^{r} \left(B^T\right)_{iu} \left(A^T\right)_{uj} = \left(B^T \cdot A^T\right)_{ij}.$$

Įrodyta.

Matricų, turinčių atvirkštines, savybės

4.15 Teiginys. *Tegu* $A, B \in \mathbf{M}_n -$ *matricos, turinčios atvirkštines. Tada:*
1. $AB-$ *matrica, turinti atvirkštinę, ir* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
2. $A^{-1}-$ *matrica, turinti atvirkštinę, ir* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
3. Matrica I_n *turi atvirkštinę.*
4. Matrica A^T *turi atvirkštinę:* $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Įrodymas.1. $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ ir $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$.
2 ir 3. akivaizdu.

4. $A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=I_n^T=I_n$ ir $\left(A^{-1}\right)^T A^T=\left(AA^{-1}\right)^T=I_n^T=I_n$.
Įrodyta.

Algebrinės struktūros: vektorinė erdvė, kūnas

4.16 Apibrėžimas. *Matematinių objektų aibė V, kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba iš skaičiaus, priklausančio* $\mathbf{R}$, *ir šie veiksmai tenkina savybes* $V1-V8$, *vadinama vektorine erdve virš* $\mathbf{R}$.

Turime, kad matricų aibė $\mathbf{M}_{m\times n}$ yra vektorinė erdvė virš $\mathbf{R}$. Tuo atveju, kai $m=1$, sakome, kad turime eilučių vektorinę erdvę $\mathbf{M}_{1\times n}=\mathbf{R}^n$ (vadiname **aritmetine eilučių vektorine erdve**), o kai $n=1$, sakome, kad turime stulpelių vektorinę erdvę $\mathbf{M}_{m\times 1}=\mathbf{R}_m$ (vadiname **aritmetine stulpelių vektorine erdve**).

4.17 Apibrėžimas. *Matematinių objektų aibė, kurioje apibrėžta sudėtis ir daugyba, ir šie veiksmai tenkina savybes analogiškos savybėms* $V1-V4$ *ir S2-S7 vadinama* **kūnu.**

Žinime du kūno pavyzdžius: *realiųjų skaičių kūną* $\mathbf{R}$ ir *racionaliųjų skaičių kūną* $\mathbf{Q}$. Atkreipkime dėmesį į tai, kad sveikųjų skaičių aibė $\mathbf{Z}$ nėra kūnas, nes joje neišpildyta savybė *S7*.

Diagonaliosios, trikampės ir simetrinės matricos.

4.18 Apibrėžimas. *Kvadratinė matrica*

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & d_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

vadinama diagonalia matrica.

Diagonali matrica yra neišsigimusi tada ir tik tada, kada visi įstrižainėje esantys skaičiai nelygūs nuliui: $d_i\neq 0$. Tokios matricos atvirkštinė yra lygi:

$$D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Nesudėtingai yra skaičiuojamas diagonalios matricos laipsnis:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}.$$

4.19 Apibrėžimas. *Kvadartinė matrica* A*, kurios elementai* $(A)_{ij} = 0$*, kai* $i < j$*, vadinama viršutine trikampe matrica, o kurios elementai* $(A)_{ij} = 0$*, kai* $i > j$*, vadinama apatine trikampe matrica.*

4.20 Pavyzdys.

$$\underset{\text{viršutinė trikampė matrica}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{apatinė trikampė matrica}}{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}$$

4.21 Teorema.

(1) *Jei* A *yra viršutinė trikampė matrica, tai* A^T *- apatinė trikampė matrica ir atvirkščiai: jei* A *yra apatinė trikampė matrica, tai* A^T *- viršutinė trikampė matrica.*

(2) *Jei* A *ir* B *yra apatinės trikampės matricos, tai ir* AB *yra apatinė trikampė matrica. Jei* A *ir* B *yra viršutinės trikampės matricos, tai ir* AB *yra viršutinė trikampė matrica.*

(3) *Jei* A *yra neišsigimusi apatinė trikampė matrica, tai* A^{-1} *yra apatinė trikampė matrica. Jei* A *yra neišsigimusi viršutinė trikampė matrica, tai* A^{-1} *yra viršutinė trikampė matrica.*

Įrodymą paliekame skaitytojui.

4.22 Pavyzdžiai. Nagrinėkime viršutines trikampes matricas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Tada

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 38 \\ 0 & 0 & 42 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{11}{15} \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

4.23 Apibrėžimas. *Kvadratinė matrica* A*, kurioje* $(A)_{ij}=(A)_{ji}$*, vadinama simetrine matrica.*

4.24 Pavyzdys.

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 1 \\ -6 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

4.25 Teorema. *Tegu A,B yra tos pačios eilės simetrinės matricos, o* $\alpha \in R$*.Tada*

(1) A^T- *simetrinė matrica.*
(2) *A+B ir A-B yra simetrinės matricos*
(3) αA *yra simetrinė matrica.*
(4) *AB simetrinė matrica tada ir tik tada, kai AB=BA.*
(5) *Jei A yra neišsigimusi, tai* A^{-1} *yra simetrinė matrica.*

4.26 Pavyzdys.

Nekomutatyvių simetrinių matricų sandauga nėra simetrinė matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Komutatyvių simetrinių matricų sandauga yra simetrinė matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}.$$

4.27 Išvada. *Tos pačios eilės simetrinės matricos sudaro vektorinę erdvę virš* $\mathbf{R}$.

Pastebėkime, kad su visomis matricomis(nebūtinai kvadratinėmis) A matricos AA^T ir A^TA yra simetrinės matricos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 37 & -1 & -17 \\ 37 & 53 & 34 & -17 \\ -1 & 34 & 61 & 0 \\ -17 & -17 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 25 & 16 \\ 25 & 99 & 1 \\ 16 & 1 & 53 \end{pmatrix}.$$

4.28 Teorema. *Jei A yra neišsigimusi matrica, tai AA^T ir A^TA yra taip pat neišsigimusi matrica.*

Įrodymas paliekamas skaitytojui.