3 paskaita: *Tiesės padėtys koordintinių ašių atžvilgiu. Kampas tarp tiesių. Tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygos. Taško atstumas iki tiesės.*

Sakykime $ax+by+c=0$ yra tiesės t lygtis. Išnagrinėsime tiesės t padėtis Ox ir Oy ašių atžvilgiu.

1) $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, $b\neq 0$. Tada tiesės t lygtis yra $y=-\frac{c}{b}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti Ox ašiai.

2) $a\neq 0$, $\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $x=-\frac{c}{a}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti Oy ašiai.

3) $\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $ax+by=0$. Šiuo atveju tiesė t eina per koordinačių pradžią.

4) $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$. Tada tiesės t lygtis ekvivalenti lygčiai $\frac{a}{-c}x+\frac{b}{-c}y=1$, o pažymėjus $\alpha=\frac{-c}{a}, \beta=\frac{-c}{b}$, lygčiai $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Tai **ašinė tiesės t lygtis.** Matome, kad tiesė t kerta koordinatines ašis taškuose $(\alpha,0)$ ir $(0,\beta)$.

Apibrėžimas 3.1. *Tiesės teigiama kryptimi vadiname tokią kryptį, kuria judant didėja taško ordinatė.*

Apibrėžimas 3.2. *Kampas tarp tiesių t_1 ir t_2 teigiamų krypčių vadinamas kampu tarp tiesių t_1 ir t_2.*

Rasime kampą tarp dviejų nelygiagrečių Oy ašiai tiesių t_1 ir t_2. Šių tiesių lygtis galima išreikšti kintamojo y atžvilgiu:

$$y=k_1x+l_1$$
$$y=k_2x+l_2,$$

čia k_i- tiesės t_i krypties koeficientas ($k_i=\text{tg}\alpha_i$, α_i- kampas tarp Ox ašies ir tiesės t_i), $i=1,2$; o l_i - atstumas nuo koordinačių pradžios iki tiesės t_i susikirtimo su Oy ašimi taško. $i=1,2$.

Tegu $\alpha_1\geq\alpha_2$. Tada ieškomasis kampas yra lygus $\varphi=\alpha_1-\alpha_2$ ir

$$\text{tg}\varphi=\text{tg}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{\text{tg}\alpha_1-\text{tg}\alpha_2}{1+\text{tg}\alpha_1\cdot\text{tg}\alpha_2}.$$

Žinant tik tiesių krypties koeficientus k_1 ir k_2 kampas φ yra lygties $\text{tg}\varphi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1\cdot k_2}$ sprendinys, tenkinantis nelygybę $0\leq\varphi<\pi$.

Pastaba 3.3 . *Jeigu viena iš tiesių yra lygiagreti Oy ašiai, o kita su Ox ašimi sudaro kampą α, tai kampas tarp tiesių φ apibrėžiamas lygybe* $\varphi = \left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$.

Tegu dviejų tiesių t_1 ir t_2 lygtys yra

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

arba (jeigu jos nelygiagrečios Oy ašiai)

$$y = k_1x + l_1$$
$$y = k_2x + l_2,$$

čia $k_i = -\frac{a_i}{b_i}, l_i = -\frac{c_i}{b_i}, i = 1, 2.$

Teorema 3.4. *Tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios arba sutampa tada ir tik tada, kada*

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0.$$

Teorema 3.5. *Tiesės t_1 ir t_2 yra statmenos tada ir tik tada, kada*

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Teoremos 3.4 įrodymas.
Įrodysime teiginį iš kairės į dešinę.
Nagrinėsime du atvejus.
1) Tegu tiesės t_1 ir t_2 lygiagrečios Oy ašiai. Tada $b_1 = b_2 = 0$ ir $a_1 \cdot 0 + 0 \cdot a_2 = 0$.
2) Tegu tiesės t_1 ir t_2 lygiagrečios, bet nelygiagrečios Oy ašiai. Tada

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}0 = 0 = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

čia $\varphi(= 0)-$ kampas tarp t_1 ir t_2 ir todėl $k_1 - k_2 = 0$ arba $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$.
Įrodysime teiginį iš dešinės į kairę.
Nagrinėkime keturis atvejus atvejus.
1) $b_1 \neq 0, b_2 = 0$. Tada $a_2 = b_2 = 0$. Bet tai prieštarauja sąlygai $a_2^2 + b_2^2 > 0$.
2) $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$. Tada turime $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ arba $k_1 = k_2$ ir $\mathrm{tg}a_1 = \mathrm{tg}\alpha_2$. Gauname, kad duotos tiesės kerta Ox ašį tuo pačiu kampu. O tai įmanoma tik tada, kai tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios arba sutampa.

3) $b_1 = 0, b_2 \neq 0$. Tada $a_1 = b_1 = 0$. Bet tai prieštarauja sąlygai $a_1^2 + b_1^2 > 0$.
4) $b_1 = b_2 = 0$. Tada $a_1 \neq 0$ ir abi tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios Oy ašiai.
Išnagrinėti atvejai įrodo teoremą.
Įrodyta.

Teoremos 3.5 įrodymas.
Įrodysime teiginį iš kairės į dešinę.
Nagrinėsime du atvejus.
1) Tegu tiesė t_1 lygiagreti Oy ašiai, t.y. $b_1 = 0$. Tada tiesė t_2 turi būti lygiagreti Ox ašiai, t.y. $a_2 = 0$. Todėl turime $a_1 \cdot 0 + 0 \cdot b_2 = 0$.
2) Tegu tiesės t_1 ir t_2 statmenos ir nė viena iš jų nelygiagreti Oy ašiai. Tada

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\tfrac{\pi}{2} = \infty = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

čia $\varphi (= \frac{\pi}{2})-$ kampas tarp t_1 ir t_2 ir todėl $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ arba $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Įrodysime teiginį iš dešinės į kairę.
Nagrinėkime tris atvejus.
1) $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$. Tada, padalijus lygybę $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ iš $b_1 b_2$, turėsime

$$1 + \left(-\tfrac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(-\tfrac{a_2}{b_2}\right) = 0$$

arba $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ ir $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} = \dfrac{k_1 - k_2}{0} = \infty$.
Tai teisinga tik tada, kai $\varphi = \frac{\pi}{2}$, t.y. tiesės t_1 ir t_2 statmenos.
2) $b_1 \neq 0$, $b_2 = 0$. Tada $a_2 \neq 0$ (neužirškime sąlygos $a_2^2 + b_2^2 > 0$) ir $a_1 = 0$. Todėl tiesė t_1 yra lygiagreti Ox ašiai ($a_1 = 0$), o tiesė t_2 yra lygiagreti Oy ašiai ($b_2 = 0$). Taigi $t_1 \perp t_2$.
3) $b_1 = 0$. Tada $a_1 \neq 0$ (neužmirškime sąlygos $a_1^2 + b_1^2 > 0$) ir $a_2 = 0$. Todėl tiesė t_1 yra lygiagreti Oy ašiai, o tiesė t_2 yra lygiagreti Ox ašiai. Taigi $t_1 \perp t_2$.
Įrodyta.

Rasime duoto taško atstumo iki tiesės formulę.

Teorema 3.6. *Taško $M\,(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės $t : ax + by + c = 0$ yra lygus*

$$\frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Įrodymas. Nesunku matyti, kad tiesė $t_\perp$, kurios lygtis

$$b(x - m_1) - a(y - m_2) = 0$$

arba

$$bx - ay + (am_2 - bm_1) = 0$$

yra statmena tiesei t (teorema 3.4). Tegu $N(n_1, n_2) -$ tiesių t ir $t_\perp$ susikirtimo taškas. Tada taško $M(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės t yra atkarpos MN ilgis, apskaičiuojamas lygybe

$$MN = \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2}.$$

Taškas N priklauso abiems tiesėms t ir $t_\perp$, todėl taško N koordinatės tenkina abiejų tiesių lygtis:

$$\begin{gathered} an_1 + bn_2 + c = 0 \\ b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2) = 0 \end{gathered}$$

Iš pirmosios lygybės išreikšę $c = -(an_1 + bn_2)$ turėsime

$$am_1 + bm_2 + c = am_1 + bm_2 - (an_1 + bn_2) = a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2).$$

Nagrinėkime sistemą sudarytą iš paskutiniųjų lygybių

$$\begin{cases} 0 = b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2) \\ am_1 + bm_2 + c = a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2) \end{cases}.$$

Pakėlus šios sistemos abi lygtis kvadratu ir poto sudėjus turėsime

$$\begin{gathered} (am_1 + bm_2 + c)^2 = (b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2))^2 + (a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2))^2 \\ (am_1 + bm_2 + c)^2 = (a^2 + b^2)\left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2\right) \end{gathered}$$

o ištraukus kvadratinę šaknį gausime

$$\begin{gathered} |am_1 + bm_2 + c| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{\left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2\right)} \\ |am_1 + bm_2 + c| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot MN \\ MN = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{gathered}$$

Įrodyta.

Priedas. *Vektorinės tiesės lygtys*

Prisiminkime vektorius. Tegu xy-plokštumos vektorius $\vec{v} = (X, Y)$ su koordinačių ašimis Ox ir Oy sudaro kampus α ir β atitinkamai. Šių kampų kosinusai $\cos\alpha, \cos\beta$ vadinami vektoriaus $\vec{v}$ **krypties kosinusais**. Tada teisingos šios lygybės:

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\ ; \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

ir

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Aptarkime kai kuriuos tiesės lygties pavidalus.

1. *Tiesės t, einančios per tašką $A(x_1, y_1)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}\,(a, b)$, lygtis.*

Tegu $B\,(x_2, y_2)$ – tiesės t taškas. Tada vektoriai $\vec{n}\,(a, b)$ ir $\vec{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ yra statmeni:

$$\vec{n}\,(a, b) \cdot \vec{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0$$
$$a\,(x_2 - x_1) + b\,(y_2 - y_1) = 0.$$

Tada tiesės t lygtis yra

$$a\,(x - x_1) + b\,(y - y_1) = 0.$$

Vektorius $\vec{n}$ vadinamas tiesės t **normalės vektoriumi**.

2. *Kanoninė tiesės t lygtis.*

Tegu $A\,(x_1, y_1)$ ir $B\,(x_2, y_2)$ – du tiesės t taškai. Tada tiesės t lygtis yra

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Vektoriai $\vec{AB}\,(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ir $\vec{BA}\,(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ yra lygiagretūs tiesei t. Išrinkime iš jų tą, kurio ordinatė teigiama ir pažymėkime jį $(l, m) = \vec{s}$ (jeigu $y_1 = y_2$, tai parenkamas tas, kurio abscisė teigiama). Vektorius $\vec{s}$ vadinamas tiesės t **krypties vektoriumi** ir lygtis

$$\frac{y-y_1}{m}=\frac{x-x_1}{l}$$

vadinama **kanonine tiesės t lygtimi**.

3. *Parametrinė tiesės t lygtis.*

Iš kanoninės tiesės t lygties turime, kad

$$\frac{y-y_1}{m}=\frac{x-x_1}{l}=z$$

ir gauname **parametrinę tiesės t lygtį**:

$$\begin{gathered} x=l\cdot z+x_1 \\ y=m\cdot z+y_1, \end{gathered}$$

čia $z\in\mathbf{R}$.

4. *Normalioji tiesės $t: ax+by+c=0,$ lygtis.*

Padauginę panariui bendrąją tiesės t lygtį iš $\text{sign}(-c)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
čia $\text{sign}(c)=\left[\begin{array}{l} 1,\ \text{jei } c\geq 0 \\ -1,\ \text{jei } c<0 \end{array}\right.$ ir pažymėję

$\cos\alpha=\text{sign}(-c)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta=\text{sign}(-c)\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $-p=\text{sign}(-c)\cdot\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

gausime normaliąją tiesės lygtį:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0.$$

Teigiamo skaičiaus p reikšmė - tai koordinačių pradžios atstumas iki tiesės t. Vektorius $\overrightarrow{n_0}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ yra **vienetinis normalės vektorius**.

5. *Vektorinė tiesės t lygtis.*

Tegu tiesė t eina per tašką $A\,(x_1,y_1)$ ir statmena normalės vektoriui $\overrightarrow{n}$. Tegu $B\,(x,y)$ - bet kuris tiesės taškas ir vektoriai $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{r_0}=\overrightarrow{OA}$. Tada vektoriai $\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}$ ir $\overrightarrow{n}$ yra statmeni:

$$\left(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_0}\right)\cdot\overrightarrow{n}=0.$$

Tai ir yra **vektorinė tiesės t lygtis**.

Pastebėsime, kad vietoje $\vec{n}$ paėmus vienetinį normalės vektorių $\vec{n_0}$ turėsime:

$$\vec{r} \cdot \vec{n_0} = p,$$

čia $p-$ koordinačių pradžios atstumas iki tiesės t.

Pastaba. Jeigu tiesė $t: \left(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}\right) \cdot \vec{n} = 0$ yra lygiagreti vektoriui $\vec{s} = (l, m)$, tai vektoriai $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ ir $\vec{s}$ kolinearūs, t.y.

$$\begin{gathered} \vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \vec{s}t \\ \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{s}t,\ t \in \mathbf{R}. \end{gathered}$$

Gavome *tiesės, lygiagrečios vektoriui* $\vec{s}$, *vektorinę lygtį.*

Norint iš tiesės vektorinių lygčių gauti koordinatines lygtis, reikia atlikti šiuos pakeitimus:

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \longrightarrow & x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{r_0} & \longrightarrow & x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \\ \vec{n} & \longrightarrow & a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{n_0} & \longrightarrow & \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} \\ \vec{s} & \longrightarrow & l\vec{i} + m\vec{j} \end{array}.$$

Norint iš tiesės koordinatinių lygčių gauti vektorines lygtis, reikia atlikti šiuos pakeitimus:

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \vec{r} \cdot \vec{i} \\ y & \longrightarrow & \vec{r} \cdot \vec{j} \\ a & \longrightarrow & \vec{n} \cdot \vec{i} \\ b & \longrightarrow & \vec{n} \cdot \vec{j} \\ \cos\alpha & \longrightarrow & \vec{n_0} \cdot \vec{i} \\ \cos\beta & \longrightarrow & \vec{n_0} \cdot \vec{j} \\ l & \longrightarrow & \vec{s} \cdot \vec{i} \\ m & \longrightarrow & \vec{s} \cdot \vec{j} \end{array}.$$