

2 paskaita *Determinantai.*

1-oje paskaitoje matėme, kad sprendžiant dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas sprendinius patogiau reikšti matricių determinantais. Apibendriname determinanto sąvoką didesnio matavimo matricioms, iš pradžių apsistodami ties trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemomis.

Tegu turime trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (1)$$

Padauginkime pirmąją lygtį iš $(b_2c_3 - b_3c_2)$, antrąją iš $(b_3c_1 - b_1c_3)$, trečiąją iš $(b_1c_2 - b_2c_1)$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & | \cdot & b_2c_3 - b_3c_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & | \cdot & b_3c_1 - b_1c_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & | \cdot & b_1c_2 - b_2c_1 \end{cases}$$

Sudėję gautas lygtis turėsime:

$$(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)x = d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 - d_3b_2c_1.$$

Padauginkime pirmąją lygtį iš $(c_2a_3 - c_3a_2)$, antrąją iš $(c_3a_1 - c_1a_3)$, trečiąją iš $(c_1a_2 - c_2a_1)$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & | \cdot & c_2a_3 - c_3a_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & | \cdot & c_3a_1 - c_1a_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & | \cdot & c_1a_2 - c_2a_1 \end{cases}$$

Sudėję gautas lygtis turėsime:

$$(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)y = a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3 - a_3d_2c_1.$$

Padauginkime pirmąją lygtį iš $(a_2b_3 - a_3b_2)$, antrąją iš $(a_3b_1 - a_1b_3)$, trečiąją iš $(a_1b_2 - a_2b_1)$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & | \cdot a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & | \cdot a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & | \cdot a_1b_2 - a_2b_1 \end{cases}$$

Sudėję gautas lygtis turėsime:

$$(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)z = a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 - a_3b_2d_1.$$

Jeigu $(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1) \neq 0$, tai

$$\begin{aligned} x &= \frac{d_1b_2c_3 + d_2b_3c_1 + d_3b_1c_2 - d_1b_3c_2 - d_2b_1c_3 - d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1} \\ y &= \frac{a_1d_2c_3 + a_2d_3c_1 + a_3d_1c_2 - a_1d_3c_2 - a_2d_1c_3 - a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1} \\ z &= \frac{a_1b_2d_3 + a_2b_3d_1 + a_3b_1d_2 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3 - a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1} \end{aligned}$$

(1) *tiesinės lygčių sistemos matrica* vadinsime lentele

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Sistemos sprendinio vardiklį sudaro 6 dėmenys: trys teigiami ir trys neigiami. Juos galima pavaizduoti ir taip:

$$\text{teigiami} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ & \searrow & \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ & \searrow & \searrow \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ & \searrow & \searrow \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ & \searrow & \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \text{ neigiami: } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ & & \nearrow \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ & \nearrow & \nearrow \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ & \nearrow & \nearrow \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ & \nearrow & \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

2.1. Apibrėžimas. Matricos $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ **determinantu** vadiname išraišką:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1.$$

Tada (1) sistemos sprendinius galima užrašyti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Šias formules vadiname *Kramerio formulėmis*. Suprantama, sistema (1) turi vienintėlį sprendinį, kai $\det A \neq 0$.

Taigi:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Apibendrinkime tai n -osios eilės kvadratinėms matricoms: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} :$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad (2)$$

čia sumuojama pagal visus aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ kėlinius (i_1, i_2, \dots, i_n) . Prisiminkime, kad tokių kėlinių yra $n!$.

Parašykime 2-osios ir 3-iosios eilės determinantų išraiškose esančių dėmenų antrųjų indeksų lenteles:

$$\text{matricai } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} :$$

su ženklu +	su ženklu -
(1, 2)	(2, 1)

$$\text{matricai } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} :$$

su ženklu +	su ženklu -
(1, 2, 3)	(3, 2, 1)
(2, 3, 1)	(2, 1, 3)
(3, 1, 2)	(1, 3, 2)

Matome, kad pusė dėmenų yra teigiamų, o pusė - neigiamų.

Patikslinsime determinanto išraiškoje (2) esančių dėmenų ženklus.

2.2. Apibrėžimas. Kėlinio (i_1, i_2, \dots, i_n) **inversija** vadinsime tokią skaičių porą $\{i_s, i_r\}$, $1 \leq i_s \neq i_r \leq n$, kad $i_s > i_r$, bet $s < r$, t.y. dešinėje kėlinyje esantis skaičius i_s yra mažesnis už kairėje esanį i_r .

Matricos determinanto išraiškoje (2) dėmuo $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ bus su ženklu "+", jei kėlinyje (i_1, i_2, \dots, i_n) yra lyginis inversijų skaičius ir su ženklu "-", jei - nelyginis. Jeigu kėlinyje (i_1, i_2, \dots, i_n) esančių inversijų skaičių pažymėsime $\text{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n)$, tai gausime patikslintą (2) formulę:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} (-1)^{\text{inv}(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad (2')$$

čia sumuojama pagal visus aibės $\{1, 2, \dots, n\}$ kėlinius (i_1, i_2, \dots, i_n) .

2.3. Apibrėžimas. Kvadratinės matricos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ (i, j) –

minoru vadinsime matricos, gautos išbraukus matricoje A i – ają eilutę ir j – ajį stulpelį, determinantą: žymėsime $M_{i,j}(A)$ arba tiesiog $M_{i,j}$.

2.4. Teiginys. Tegū $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Tada teisinga:

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Įrodymas. $a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \det A.$

Įrodyta.

Šį teiginį galima apibendrinti:

2.5. Teiginys. Tegū $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Tada teisinga:

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}M_{1n}.$$

Dažnai teiginyje esančia lygybe apibrėžia matricos A determinantą.

Galima apibendrinti teiginyje 2.5 esančią formulę:

2.6. Teorema. Su visais $i = 1, 2, \dots, n$ turime *determinanto skleidimo i – ają eilutę formulę*:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}.$$

Su visais $j = 1, 2, \dots, n$ turime *determinanto skleidimo j – uoju stulpeliu formulę*:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j}$$

Iš teiginio 2.5 tiesiogiai turime svarbias determinanto savybes:

D1. Jeigu matricos kuris nors stulpelis yra nulinis, tai tos matricos determinantas yra lygus 0.

D2. Tegū $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ir $a_{i,j} = 0$, kai $i < j$. Tada

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

D3. Tegū $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ir $a_{i,j} = 0$, kai $i > j$. Tada

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

D4. Tegū $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Matricą $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ vadiname **transponuota** matrica. Tada

$$\det A = \det A^T.$$

D5. Jeigu matricos A du stulpeliai yra lygūs, tai $\det A = 0$.

D6. Jeigu matricos A dvi eilutės yra lygios, tai $\det A = 0$.

D7. Sukeitus du stulpelius arba dvi eilutes vietomis keičiasi determinanto ženklas.

D8. Determinantas yra tiesinė funkcija visų eilučių ir stulpelių atžvilgiu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & \cdots & a_{1n} + a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + a'_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \cdots & ta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} ta_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

D9. Determinantas nesikeis, jei prie kurios nors eilutės (kurio nors stulpelio) pridėsime kitą eilutę (kitą stulpelį) galbūt padaugintą iš skaičiaus.

2.7.Pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Pirmąją eilutę padaugintą iš (-4) pridėkime prie antrosios eilutės, o pirmąją eilutę padaugintą iš (-8) pridėkime prie trečiosios eilutės:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-4) & (-8) \\ \downarrow & \downarrow \\ & \downarrow \end{matrix}$$

Remiantis D9 pradinio determinanto reikšmė nepasikeis, pats determinantas supaprastės:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Gautą determinantą išskleiskime pirmuoju eilute:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -8 & -15 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -8 & -15 \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Prieš determinantą iškelkime bentrąjį pirmosios eilutės daugiklį (-3) (savybė D8):

$$\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -8 & -15 \end{vmatrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Pirmąją eilutę padauginę iš (8) pridėkime prie antrosios eilutės:

$$(-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -15 \end{vmatrix} \begin{matrix} (8) \\ \downarrow \end{matrix} = (-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{savybė } D2}{=} (-3)(1)(1) = -3.$$

2.8.Pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3) & (-7) & (-1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ & \begin{matrix} (-2) \\ \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (1) \\ \downarrow \end{matrix} = \\ & \begin{matrix} (-2) \\ \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix} \stackrel{\text{trečios ir ketvirtos eilutės keitimas vietomis}}{=} \\ & (-1)(-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} (12) \\ \downarrow \end{matrix} = (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = (2)(1)(1)(1)(30) = \\ & 60 \end{aligned}$$

2.9.Pavyzdys. Tiesės, einančios per taškus $A(x_1, y_1)$ ir $B(x_2, y_2)$, lygtis yra:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Iš tikro, turime

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \\ x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Matome, kad (3) yra tiesės lygtis

$$ax + by + c = 0,$$

$$\text{čia } a = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}, b = - \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}, c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Ši tiesė eina per taškus A ir B , nes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Paskutinįjį pavyzdį galima apibendrinti trimačiai erdvei.

2.10. Vandermondo (*A. T. Vandermonde, 1735-1796, prancūzų matematikas*) determinantas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Atimkime iš 2-ojo ir 3-ojo stulpelių 1-ąjį ir poto išskleiskime determinantą 1-ąją eilute:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_1^2 & x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_2^2 - x_1^2 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} = \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 + x_1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$