2 paskaita. *Dekarto koordinačių sistema. Kreivės lygtis. Kreivių susikirtimo taškai. Bendroji tiesės lygtis. Dviejų tiesių sankirtos taškai. 2-os eilės determinantas*

Apibrėžimas 2.1. *Plokštuma, kurioje pravestos dvi statmenos viena kitai tiesės Ox ir Oy, susikertančios taške O, vadinama xy-plokštuma. Taškas O dalija kiekvieną iš šių tiesių į du spindulius: vieną iš jų kiekvienoje tiesėje vadiname teigiama kryptimi, kitą - neigiama.*

Dekarto(R.Descartes,1596-1650, prancūzų matematikas) koordinačių sistema, tai xy-plokštuma, kurioje su kiekviena skaičių pora x_0, y_0 galima vienareikšmiškai susieti xy-plokštumos tašką A, kurio abscisė yra x_0, o ordinatė - y_0.

Tegu dabar xy-plokštumoje yra kreivė γ. Sakysime, kad lygtis $f(x,y) = 0$ yra duotos *kreivės lygtis*, jeigu, pirma, visų kreivės γ takšų koordinatės tenkina šią lygtį, antra, skaičių pora x_0, y_0, tenkinanti lygtį $f(x,y) = 0$, yra kreivės γ taško koordinatės.

Tegu xy-plokštumoje dabar duotos dvi kreivės: kreivė γ_1 ir jos lygtis $f_1(x,y) = 0$; kreivė γ_2 ir jos lygtis $f_2(x,y) = 0$.

Tegu $A(x_0, y_0)$ yra kreivių γ_1 ir γ_2 susikirtimo taškas. Tada taško koordinatės tenkina tiek lygtį $f_1(x,y) = 0$, tiek lygtį $f_2(x,y) = 0$, t.y. skaičių x_0, y_0 pora yra sistemos $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ sprendinys. Akivaizdu, kad teisingas ir atvirkščias teiginys: bet kuris sistemos sprendinys $x = x_0, y = y_0$ atitinka kreivių susikirtimo tašką A, kurio koordinatės yra x_0, y_0 (įrodykite!).

Aptarsime dabar paprasčiausią kreivės pavyzdį $-$ tiesę.

Tiesioginė teorema 2.2. *Duotai tiesei t egzistuoja tokie skaičiai a, b, c, tenkinantys sąlygą $a^2 + b^2 > 0$, kad $ax + by + c = 0$ yra tiesės t lygtis.*

Atvirkštinė teorema 2.3. *Tegu a ir b - du skaičiai, tenkinantys sąlygą $a^2 + b^2 > 0$. Tada egzistuoja tokia tiesė, kurios lygtis yra $ax + by + c = 0$.*

Tiesioginės teoremos įrodymas. Tegu $B\left(x_1, y_1\right)$ ir $C\left(x_2, y_2\right)$ - du simetriški tiesės t atžvilgiu taškai. Remiantis trikampių lygumo požymiais ir lygiašonio trikampio savybėmis turime , kad taškas $A\left(x_0, y_0\right)$ yra tiesės t taškas tada ir tik tada, kada $BA = CA$, t.y. $\left(x_0 - x_1\right)^2 + \left(y_0 - y_1\right)^2 = \left(x_0 - x_2\right)^2 + \left(y_0 - y_2\right)^2$ (įrodykite!). Todėl tiesės lygtis yra

$$\left(\mathbf{x} - x_1\right)^2 + \left(\mathbf{y} - y_1\right)^2 = \left(\mathbf{x} - x_2\right)^2 + \left(\mathbf{y} - y_2\right)^2.$$

Suprastinus turėsime

$$2\left(x_2 - x_1\right)\mathbf{x} + 2\left(y_2 - y_1\right)\mathbf{y} + \left(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2\right) = 0.$$

Įrodyta.

Atvirkštinės teoremos įrodymas.

Tegu xy-plokštumos skirtingų taškų $M\left(m_1, m_2\right)$ ir $N\left(n_1, n_2\right)$ koordinatės yra lygties $ax + by + c = 0$ sprendiniai, o tiesės MN lygtis yra $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Tada taškų M ir N koordinatės yra lygčių sistemos

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

sprendiniai. Taškai M ir N yra skirtingi, todėl skiriasi nors viena šių taškų koordinatė, sakykime $m_1 \neq n_1$. Padauginkime (1) sistemos pirmąją lygtį iš b_1, o antrąją $-$ iš $(-b)$ ir sudėkime gautas lygtis. Turėsime

$$\left(ab_1 - a_1b\right)x + \left(cb_1 - c_1b\right) = 0.$$

Šios lygties sprendiniais yra **du skirtingi** skaičiai m_1 ir n_1, todėl

$$\left(ab_1 - a_1b\right) = 0 \text{ ir } \left(cb_1 - c_1b\right) = 0\ ,$$

t.y.sistemos (1) lygtys yra ekvivalenčios ir tiesės

$$ax + by + c = 0 \text{ ir } a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

sutampa.

Įrodyta.

Dviejų tiesių susikirtimo taškai.

Tegu plokštumoje duotos dvi tiesės t_1 ir t_2, kurių lygtys atinkamai

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ ir } a_2x + b_2y = c_2.$$

Susikirtimo taškų koordinatės yra sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2)$$

sprendiniai. Tegu $A(x_0, y_0)$ yra tiesių t_1 ir t_2 susikirtimo taškas. Išreikškime taško A koordinates x_0 ir y_0 sistemos (2) koeficientais $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.

Padauginkime pirmąją lygtį iš b_2, antrąją – iš $(-b_1)$ ir sudėkime lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \; (3)$$

Padauginkime dabar pirmąją lygtį iš $(-a_2)$, antrąją – iš a_1 ir sudėkime lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$, tai

$$x_0 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)} \text{ ir } y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

Šiuo atveju turime vieną susikirtimo tašką.

Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$, tai galimi du atvejai:

1)$c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ ir 2) $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$.

Pirmuoju atveju sistemoje (2) yra dvi ekvivalenčios lygtys, t.y. tiesės t_1 ir t_2 sutampa ir yra be galo daug susikirtimo taškų.

Antruoju atveju sistema (2) neturi sprendinių, nes iš (3) turime, kad $0 = c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, t.y. tiesės t_1 ir t_2 neturi susikirtimo taškų ir todėl jos yra lygiagrečios: $t_1 \| t_2$.

Apibrėžimas 2.4. *Lentelę* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *vadiname lygčių sistemos* (2) *matrica.*

Apibrėžimas 2.5. *Išraišką* $a_1b_2 - a_2b_1$ *vadiname matricos* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *determinantu(2-os eilės determinantu) ir žymime*:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Tuo atveju, kai tiesės kertasi viename taške, šio taško koordinates galima užrašyti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ir } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Tai sistemos (2) Kramerio (*G.Cramer,1704-1752, šveicarų matematikas)* formulės.