1 paskaita. *Dekarto koordinačių sistema. Kreivės lygtis. Kreivių susikirtimo taškai. Bendroji tiesės lygtis. Dviejų tiesių sankirtos taškai. 2-os eilės determinantas. Tiesės padėtys koordintinių ašių atžvilgiu. Kampas tarp tiesių. Tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygos.Taško atstumas iki tiesės.*

Apibrėžimas 1.1. *Plokštuma, kurioje pravestos dvi statmenos viena kitai tiesės Ox ir Oy, susikertančios taške O, vadinama xy-plokštuma. Taškas O dalija kiekvieną iš šių tiesių į du spindulius: vieną iš jų kiekvienoje tiesėje vadiname teigiama kryptimi, kitą - neigiama.*

Dekarto(R.Descartes,1596-1650, prancūzų matematikas) koordinačių sistema, tai xy-plokštuma, kurioje su kiekviena skaičių pora x_0, y_0 galima vienareikšmiškai susieti xy-plokštumos tašką A, kurio abscisė yra x_0, o ordinatė - y_0.

Tegu dabar xy-plokštumoje yra kreivė γ. Sakysime, kad lygtis $f(x,y) = 0$ yra duotos *kreivės lygtis*, jeigu, pirma, visų kreivės γ taškų koordinatės tenkina šią lygtį, antra, skaičių pora x_0, y_0, tenkinanti lygtį $f(x,y) = 0$, yra kreivės γ taško koordinatės.

Tegu xy-plokštumoje dabar duotos dvi kreivės: kreivė γ_1 ir jos lygtis $f_1(x,y) = 0$; kreivė γ_2 ir jos lygtis $f_2(x,y) = 0$.

Tegu $A(x_0, y_0)$ yra kreivių γ_1 ir γ_2 susikirtimo taškas. Tada taško koordinatės tenkina tiek lygtį $f_1(x,y) = 0$, tiek lygtį $f_2(x,y) = 0$, t.y. skaičių x_0, y_0 pora yra sistemos $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$ sprendinys. Akivaizdu, kad teisingas ir atvirkščias teiginys: bet kuris sistemos sprendinys $x = x_0, y = y_0$ atitinka kreivių susikirtimo tašką A, kurio koordinatės yra x_0, y_0 (įrodykite!).

Aptarsime dabar paprasčiausią kreivės pavyzdį $-$ tiesę.

Tiesioginė teorema 1.2. *Duotai tiesei t egzistuoja tokie skaičiai a, b, c, tenkinantys sąlygą $a^2 + b^2 > 0$, kad $ax + by + c = 0$ yra tiesės t lygtis.*

Atvirkštinė teorema 1.3. *Tegu a ir b - du skaičiai, tenkinantys sąlygą $a^2 + b^2 > 0$. Tada egzistuoja tokia tiesė, kurios lygtis yra $ax + by + c = 0$.*

Be Įrodymo.
Lygtis $ax + by + c = 0$ vadinama *bendrąja tiesės lygtimi*.
Dviejų tiesių susikirtimo taškai.
Tegu plokštumoje duotos dvi tiesės t_1 ir t_2, kurių lygtys atinkamai

$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ ir } a_2x + b_2y = c_2.$$

Susikirtimo taškų koordinatės yra sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2)$$

sprendiniai. Tegu $A(x_0, y_0)$ yra tiesių t_1 ir t_2 susikirtimo taškas. Išreikškime taško A koordinates x_0 ir y_0 sistemos (2) koeficientais $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$.
Padauginkime pirmąją lygtį iš b_2, antrąją – iš $(-b_1)$ ir sudėkime lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \ (3)$$

Padauginkime dabar pirmąją lygtį iš $(-a_2)$, antrąją – iš a_1 ir sudėkime lygtis. Turėsime:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1.$$

Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0$, tai

$$x_0 = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)} \text{ ir } y_0 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{(a_1b_2 - a_2b_1)}.$$

Šiuo atveju turime vieną susikirtimo tašką.
Jeigu $(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$, tai galimi du atvejai:
1)$c_1b_2 - c_2b_1 = 0$ ir 2) $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$.
Pirmuoju atveju sistemoje (2) yra dvi ekvivalenčios lygtys, t.y. tiesės t_1 ir t_2 sutampa ir yra be galo daug susikirtimo taškų.
Antruoju atveju sistema (2) neturi sprendinių, nes iš (3) turime, kad $0 = c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$, t.y. tiesės t_1 ir t_2 neturi susikirtimo taškų ir todėl jos yra lygiagrečios: $t_1 \| t_2$.

Apibrėžimas 1.4. *Lentelę* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *vadiname lygčių sistemos* (2) *matrica.*

Apibrėžimas 1.5. *Išraišką* $a_1b_2 - a_2b_1$ *vadiname matricos* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *determinantu(2-os eilės determinantu) ir žymime*:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Tuo atveju, kai tiesės kertasi viename taške, šio taško koordinates galima užrašyti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ ir } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Tai sistemos (2) Kramerio (*G.Cramer,1704-1752, šveicarų matematikas)* formulės.

Tiesės padėtys koordintinių ašių atžvilgiu.

Sakykime $ax + by + c = 0$ yra tiesės t lygtis. Išnagrinėsime tiesės t padėtis Ox ir Oy ašių atžvilgiu.

1) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $b \neq 0$. Tada tiesės t lygtis yra $y = -\frac{c}{b}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti Ox ašiai.

2) $a \neq 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $x = -\frac{c}{a}$. Šiuo atveju tiesė t lygiagreti Oy ašiai.

3) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Tada tiesės t lygtis yra $ax + by = 0$. Šiuo atveju tiesė t eina per koordinačių pradžią.

4) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Tada tiesės t lygtis ekvivalenti lygčiai $\frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1$, o pažymėjus $\alpha = \frac{-c}{a}, \beta = \frac{-c}{b}$, lygčiai $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$. Tai **ašinė tiesės t lygtis.** Matome, kad tiesė t kerta koordinatines ašis taškuose $(\alpha, 0)$ ir $(0, \beta)$.

Apibrėžimas 1.6. *Tiesės teigiama kryptimi vadiname tokią kryptį, kuria judant didėja taško ordinatė.*

Apibrėžimas 1.7. *Kampas tarp tiesių t_1 ir t_2 teigiamų krypčių vadinamas kampu tarp tiesių t_1 ir t_2.*

Rasime kampą tarp dviejų nelygiagrečių Oy ašiai tiesių t_1 ir t_2. Šių tiesių lygtis galima išreikšti kintamojo y atžvilgiu:

$$y = k_1x + l_1$$
$$y = k_2x + l_2,$$

čia k_i- tiesės t_i krypties koeficientas ($k_i =$tgα_i, α_i- kampas tarp Ox ašies ir tiesės t_i), $i = 1, 2$; o l_i - atstumas nuo koordinačių pradžios iki tiesės t_i susikirtimo su Oy ašimi taško. $i = 1, 2$.

Tegu $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Tada ieškomasis kampas yra lygus $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$ ir

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \tfrac{\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2}{1+\mathrm{tg}\alpha_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha_2}.$$

Žinant tik tiesių krypties koeficientus k_1 ir k_2 kampas φ yra lygties tg$\varphi = \frac{k_1-k_2}{1+k_1 \cdot k_2}$ sprendinys, tenkinantis nelygybę $0 \leq \varphi < \pi$.

Pastaba 1.8 . *Jeigu viena iš tiesių yra lygiagreti Oy ašiai, o kita su Ox ašimi sudaro kampą α, tai kampas tarp tiesių φ apibrėžiamas lygybe* $\varphi = \left|\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right|$.

Tegu dviejų tiesių t_1 ir t_2 lygtys yra

$$\begin{array}{c} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{array}$$

arba (jeigu jos nelygiagrečios Oy ašiai)

$$\begin{array}{c} y = k_1x + l_1 \\ y = k_2x + l_2, \end{array}$$

čia $k_i = -\frac{a_i}{b_i}, l_i = -\frac{c_i}{b_i}, i = 1, 2$.

Teorema 1.9. *Tiesės t_1 ir t_2 yra lygiagrečios arba sutampa tada ir tik tada, kada*

$$a_1b_2 - b_1a_2 = 0.$$

Teorema 1.10. *Tiesės t_1 ir t_2 yra statmenos tada ir tik tada, kada*

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Be įrodymo.

Rasime duoto taško atstumo iki tiesės formulę.

Teorema 1.11. *Taško $M\,(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės $t : ax + by + c = 0$ yra lygus*

$$\frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Įrodymas. Nesunku matyti, kad tiesė $t_\perp$, kurios lygtis

$$b(x - m_1) - a(y - m_2) = 0$$

arba

$$bx - ay + (am_2 - bm_1) = 0$$

yra statmena tiesei t (teorema 3.4). Tegu $N(n_1, n_2)-$ tiesių t ir $t_\perp$ susikirtimo taškas. Tada taško $M(m_1, m_2)$ atstumas iki tiesės t yra atkarpos MN ilgis, apskaičiuojamas lygybe

$$MN = \sqrt{(m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2}.$$

Taškas N priklauso abiems tiesėms t ir $t_\perp$, todėl taško N koordinatės tenkina abiejų tiesių lygtis:

$$\begin{gathered} an_1 + bn_2 + c = 0 \\ b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2) = 0 \end{gathered}$$

Iš pirmosios lygybės išreikšę $c = -(an_1 + bn_2)$ turėsime

$$am_1 + bm_2 + c = am_1 + bm_2 - (an_1 + bn_2) = a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2).$$

Nagrinėkime sistemą sudarytą iš paskutiniųjų lygybių

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 = b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2) \\ am_1 + bm_2 + c = a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2) \end{array} \right. .$$

Pakėlus šios sistemos abi lygtis kvadratu ir poto sudėjus turėsime

$$\begin{gathered} (am_1 + bm_2 + c)^2 = (b(n_1 - m_1) - a(n_2 - m_2))^2 + (a(m_1 - n_1) + b(m_2 - n_2))^2 \\ (am_1 + bm_2 + c)^2 = (a^2 + b^2)\left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2\right) \end{gathered}$$

o ištraukus kvadratinę šaknį gausime

$$\begin{gathered} |am_1 + bm_2 + c| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{\left((m_1 - n_1)^2 + (m_2 - n_2)^2\right)} \\ |am_1 + bm_2 + c| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot MN \\ MN = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{gathered}$$

Įrodyta.