V. KOMBINATORIKA

5.1 Junginiai

Tarkime, kad U yra netuščia aibė, kurioje yra n elementų. Tokias aibes vadinsime $n-$elementėmis (arba n) aibėmis. Jei baigtinėje aibėje yra n elementų, tai aibės U elementų skaičių žymėsime $|U| = n$. Bet kokį baigtinės aibės elementų rinkinį vadinsime aibės elementų *junginiu*. Pastebėsime, kad junginyje (be apribojimų) gali būti bet koks ir bet kokių, aibės elementų skaičius, t.y. rinkinį galime sudaryti ir iš pasikartojančių elementų. Junginį vadinsime *sutvarkytu*, jeigu elementų padėtis junginyje yra svarbi. Kitu atveju, junginiai bus vadinami *nesutvarkytais*. Jeigu pradinėje aibėje yra n elementų, o sudarytame šios aibės elementų junginyje yra k elementų, tai sakysime, kad junginys yra 'iš n po k.' Junginius vadinsime *be pasikartojimų*, jeigu visi junginio elementai yra skirtingi. Priešingu atveju junginiai vadinami su *pasikartojimais*. Matematikos sritis, nagrinėjanti aibės elementų junginių sudarymo būdus ir šių junginių skaičiaus nustatymo metodus vadinama *kombinatorika*.

Tarkime, kad kokiam nors objektui X pasirinkti yra n galimybių, o objektui Y pasirinkti yra m galimybių, tai pasirinkti objektą "X arba Y" yra $m + n$ galimybių. Tarkime, kad viename krepšyje yra 5 obuoliai, o kitame krepšyje- 7 kriaušės. Tada pasirinkti vieną kurį nors vaisių yra 12 galimybių. Ši taisyklė vadinama *junginių sumavimo taisykle.*

Tarkime, kad objektui X parinkti yra n galimybių, o objektui Y parinkti yra m galimybių. Tada parinkti šių objektų porą yra nm galimybių.

Pavyzdžiui, kiek galime sudaryti $3-$elemenčių junginių, jeigu pirmam elementui pasirinkti turime 3 galimybes, antram- 5 galimybes, trečiajam- 7 galimybes. Tada trielementį junginių galime sudaryti $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ būdais.

Apibendrinkime aukščiau pateiktus pastebėjimus. Tarkime, kad aibėje X_1 yra n_1, X_2 yra n_2, ir t.t., aibėje X_k yra n_k elementų. Tada galimybių pasirinkti bent vieną aibių X_1, X_2, ... ,X_n elementų yra $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ galimybių. Tai junginių sumavimo taisyklės apibendrinimas.

Sudarykime $k-$elemetį junginį, kuriame būtų pirmosios aibės elementas, kitas junginio elementas iš aibės X_2 ir t.t. $k-$ asis junginio elementas iš aibės X_k. Tokiu būdu sudarytų junginių skaičius bus lygus: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$. Ši junginių sudarymo taisyklė vadinama *junginių daugybos taisykle.* Pastaroji taisyklė taikoma ypatingai dažnai.

Tarkime, kad duota aibė X, kurioje yra n elementų. Sudarykime junginius iš n po k elementų. Sutvarkytus junginius vadinsime *gretiniais*, o nesutvarkytus- *deriniais.*

Gretiniu be pasikartojimų, iš n elementų po k, vadinsime bet kokį sutvarkytą be pasikartojimų aibės X poaibį, kuriame yra k elementų. Taigi, du gretiniai yra skirtingi, jeigu jie skiriasi bent vienu elementu arba elementų tarpusavio padėtimi.

1 Teorema *Tarkime, kad aibėje yra n elementų. Tada iš šios aibės elementų galima sudaryti tokį skirtingų $k-$ mačių gretinių skaičių:*

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Pastebėsime, kad šiuo atveju $k \leq n$.

$\ominus$

Šią formulę įrodykime naudodami matematinės indukcijos metodą. Tikriname šios formulės teisingumą, kai $k = 1$. Viena vertus, gretinių iš n po 1 yra lygiai n. Antra vertus, į formulės dešinę pusę įrašę $k = 1$ gauname, kad

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

Taigi, pirmąjam indukciniam žingsniui formulė yra teisinga. Tarkime, kad kažkokiam žingsniui $k = l$ formulė yra teisinga, t.y.

$$A_n^l = n(n-1)\dots(n-l+1) = \frac{n!}{(n-l)!}.$$

Parodykime, kad ir sekančiam žingsniui $k = l+1$ formulė yra teisinga, t.y.

$$A_n^{l+1} = n(n-1)\dots(n-l) = \frac{n!}{(n-l-1)!}.$$

Tarkime, kad turime kokį nors l elementį fiksuotą gretinį. Sudarykime $l+1$ elementį gretinį, prirašydami iš dešinės prie l elemenčio gretinio vieną elementą. Pradinėje aibėje, kai l elementis gretinys fiksuotas, šiam gretiniui nepriklausančių elementų yra likę $n - l$. Taigi, kai l elementis gretinys fiksuotas, galime sudaryti $n-l$ naujų skirtingų $l+1$ elemenčių gretinių. Tokiu būdu visus $l+1$ elemenčius gretinius, naudodamiesi junginių daugybos savybe, gausime sudauginę l elemenčių gretinių skaičių iš $l+1$ elemenčių gretinių skaičiaus, kai l elementis gretinys fiksuotas:

$$A_n^{l+1} = \frac{n!}{(n-l)!}(n-l) = \frac{n!}{(n-l-1)!}.$$

Parodėme, kad jei formulė teisinga skaičiui l, tai ji teisinga ir skaičiui $l+1$. Naudodamiesi indukcijos aksioma darome išvadą, kad formulė teisinga bet kokiam natūraliąjam skaičiui.

Formulė įrodyta.

$\ominus$

Gretinį be pasikartojimų iš n elementų po n vadinsime kėliniu. Kėlinių skaičių žymėsime simboliu P_n. Šių junginių skaičius yra lygus

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Gretiniu su pasikartojimais iš n elementų po k, vadinsime $k-$ elementį gretinį, sudarytą iš bet kokių (ir tų pačių) šios aibės elementų. Gretinių su pasikartojimu skaičių žymėsime simboliu $\overline{A}_n^k$. Šių junginių skaičius yra toks:

2 Teorema *Gretinių iš n po k su pasikartojimais skaičius yra*

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

$\ominus$

Tegu $A = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sudarykime $k-$elemetį junginį iš aibės A elementų, kuriame pirmoje pozicijoje būtų aibės $X_1 = A$ elementas , antroje- $X_2 = A$ elementas ir t.t. $k-$ oje pozicijoje aibės $X_k = A$ elementas. Naudodamiesi junginių daugybos taisykle gauname, kad tokių junginių skaičius yra $n_1 \cdot n_2 \ldots n_k = n^k$.

$\oplus$

Pastebėsime, kad gretinių su pasikartojimais skaičius, apibrėžiamas Dekarto sandauga:

$$\overline{A}_n^k = |A \times A \times \ldots \times A| = A^k.$$

Tarkime, kad turime k rūšių skirtingų objektų. Tegu $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$. T.y. pirmos rūšies objektų skaičius yra n_1, antros n_2 ir t.t. $k-$ os rūšies yra n_k objektų. Tada gretinį iš n elementų po n, kai elementai gretinyje kartojasi, vadinsime *kėliniu su pasikartojimais.* Šių kėlinių skaičių žymėsime simboliu $P(n_1, \ldots, n_k)$.

3 Teorema Kėlinių su pasikartojimais skaičius yra lygus

$$P_n(n_1, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}.$$

$\ominus$

Įrodymas. Jei visi elementai būtų skirtingi, tai skirtingų junginių būtų $n!$. Nesunku suprasti, kad jei kai kurie elementai sutampa, tai juo keičiant tarpusavyje vietomis, o kitų junginio elementų nekeičiant, naujo junginio negausime. Tarkime, kad junginyje pirmieji n_1 elementai sutampa. Fiksavę likusius $n-n_1$ junginio elementus, o su pirmuosius n_1 keisdami vietomis mes gausime tą patį junginį. Kadangi sutampantys elementai užima n_1 poziciją junginyje, tai atlikę $n_1!$ keitimų mes turėsime tą patį junginį. Vadinasi, jei junginyje yra n_1 vienodi elementai, tai skirtingų junginių skaičius bus $\frac{n!}{n_1!}$. Visiškai analogiškai, jei junginyje yra sutampančios n_2 elementų ir t.t. n_k elementų grupės, tai skirtingų gretinių skaičius bus lygus:

$$P_n(n_1, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}.$$

$\oplus$

Deriniu be pasikartojimų iš n elementų po k vadinsime bet kokį aibės, turinčios n elementų poaibį, kuriame yra k elementų. Kitaip tariant, minėtas derinys yra $k-$ elementis, nesutvarkytas junginys. Derinių iš n elementų po k skaičių žymėsime simboliu C_n^k.

4 Teorema Jeigu aibėje n elementų, tai derinių iš n elementų po k yra toks skaičius:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\ominus$

Pastebėsime, kad gretinių ir derinių sudarymo principas iš n po k yra panašus, tik sudarant derinius reikėtų atkreipti dėmesį, kad derinyje elementų tvarka nesvarbi. Taigi, skaičiuodami derinių skaičių elgsimės tokiu būdu: raskime visus gretinius iš n po k ir kaip ir kėlinių su pasikartojimais atveju, pašalinkime visus atvejus, kurie gaunami tuos pačius elementus keičiant vietomis. Kitaip tariant derinių iš n po k skaičius yra $k!$ kartų mažesnis negu gretinių iš n po k. Vadinasi

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}.$$

$\oplus$

Deriniai su pasikartojimais. Nagrinėsime junginius, kuriuose tvarka nesvarbi, bet elementai gali kartotis, t.y. kartotinį derinį sudaro elementai ir šių elementų kartotinumai. Tiksliau kalbant, tarkime, kad rinkinyje elementas a_1 kartojasi n_1 kartą, elementas a_2 kartojasi n_2 kartus ir t.t. elementas a_k kartojasi n_k kartų, beje $n_1 + n_2 + \ldots n_k = n$. Tada šį junginį, kai tvarka nesvarbi, vadinsime deriniu su pasikartojimais iš n po k.

5 Teorema *Derinių su pasikartojimais iš n po k skaičius yra toks:*

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

$\ominus$

Tarkime, kad $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, t.y. nagrinėjamą rinkinį sudaro k grupių, kai kiekvienoje yra n_k pasikartojimų, $0 \leq n_k \leq n$. Užkoduokime kokį nors sudarytą derinį su pasikartojimais tokiu būdu: jei $i-$ oje grupėje yra pasirinkta $n_i > 0$ elementų, tai visus šiuos elementus koduojame vienetu, jei $j-$ osios grupės elementai nebuvo pasirinkti į derinį, tai ši grupė bus koduojama nuliu. Skirtingų grupių elementai skiriami viena nuo kitos nuliu. Jei seka prasideda nuliu tai reiškia, kad pirmosios grupės elementų sekoje nėra, o jei seka baigiasi nuliu reiškia, kad paskutiniosios grupės elementai nepatenka į derinį.

Pateikime pavyzdį. Tarkime, kad pašto skyriuje yra trijų rūšių atvirukai. Mergaitė nori nusipirkti 7 atvirukus. Keliais būdais ji gali tai padaryti? Žinoma, pasirinkimo galimybių yra daug. Ką reiškia pateikti užkoduoti pasirinkimai: 011110111, 110011111, 111011011. Pirmoji seka reiškia, kad pirmosios rūšies atvirukų nebuvo pasirinkta, antrosios rūšies buvo pasirinkta keturi ir trečiosios- trys; antroje sekoje užkoduotas toks pasirinkimas- buvo pasirinkti du pirmosios rūšies atvirukai, antrosios rūšies atvirukų pasirinkta nebuvo, o trečiosios rūšies- penki atvirukai; trečioje sekoje užkoduotas toks pasirinkimas- buvo pasirinkti trys pirmosios rūšies atvirukai, du antrosios rūšies atvirukai, o trečiosios rūšies irgi du atvirukai;

Tęskime įrodymą. Pasirinktu būdu koduodami derinį mes sudarome seką, kurioje yra n vienetų (kiek pasirinkimų buvo atlikta) ir $k-1$ nulis, kurie atskiria skirtingas grupes. Tad gauname vienetų ir nulių seką, kuri atitinką derinį su pasikartojimais. Belieka nustatyti keliais būdais galima išdėstyti junginyje n vienetų ir $k-1$ nulį. Bet tai jau nagrinėtas uždavinys, t.y. reikia nustatyti kėlinių skaičių iš dviejų elementų, kai vieno elemento kartotinumas n, o kito kartotinumas $k-1$. Tokių kėlinių yra

$$P_{n+k-1}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

Bet šis skaičius tuo pačiu ir gretinių su pasikartojimais iš n po k skaičius. Taigi

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

$\oplus$

Tarkime, kad sporto salėje yra 5 rūšių kamuoliai (kiekvienos rūšies po daug). Be to yra 8- ios mokinių komandos. Keliais skirtingais būdais galima paskirstyti kamuolius šioms komandoms? Kadangi tai gretinys su pasikartojimais "iš 5 po 8" tai galimybių skaičius yra toks

$$\overline{C}_5^8 = C_{8+5-1}^8.$$

5.2 Binominiai ir polinominiai koeficientai

6 Teorema (Niutono- Binomo formulė) *Visiems $n \in \mathcal{N}$ ir $a, b \in \mathcal{R}$ teisinga lygybė:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^1 a b^{n-1} + b^n. \tag{1}$$

$\ominus$

Įrodykime pastarąją formulę, naudodami indukcijos metodą. Pradžioje įrodykime Paskalio lygybę:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k, \tag{2}$$

kadangi

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!(\ +1)}{(n+1-k)!k!} = C_{n+1}^k.$$

Visų pirma parodysime, kad aibė M, kuriems ši formulė teisinga, sutampa su natūraliųjų skaičių aibe (prisiminkime natūraliųjų skaičių aibės aksiomatiką). Tikriname ar ši formulė teisinga, kai $n = 1$. šiuo atveju turime tokį sąryšį:

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

Kadangi $C_1^0 = C_1^1 = 1$, tai lygybė teisinga, kai $n = 1$.

Darome prielaidą, kad nagrinėjama lygybė (2) yra teisinga kažkokiam skaičiui $n = s$. Parodykime, kad ji teisinga ir sekančiam skaičiui.

Turime, kad

$$(a+b)^s = C_s^0 a^s + C_s^1 a^{s-1} b + C_s^2 a^{s-2} b^2 + \ldots + C_s^1 a b^{s-1} + b^s.$$

Parodykime, kad lygybė teisinga ir sekančiam žingsniui, t.y. kai $n = s+1$. Tada

$$(a+b)^{s+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{s} C_s^k a^k b^{s-k} = \sum_{k=0}^{s} C_s^k a^s b^{s-k+1} + \sum_{k=0}^{s} C_s^k a^{s+1} b^{s-k}.$$

Pakeitę paskutiniose sumose indeksų žymėjimus: pirmoje sumoje $k := l$, o antroje sumoje $k := l - 1$ gausime tokį reiškinį:

$$(a+b)^{s+1} = a^{s+1} + \sum_{l=1}^{s} C_s^l a^l b^{s-l+1} + \sum_{l=1}^{s+1} C_s^{l-1} a^l b^{s-l+1} =$$

$$a^{s+1} + \sum_{l=1}^{s} (C_s^l + C_s^{l-1}) a^l b^{s-l+1} + b^{s+1}.$$

Pasinaudoję (2) lygybe gauname

$$(a+b)^{s+1} = a^{s+1} + \sum_{l=1}^{s} C_{s+1}^l a^l b^{s-l+1} + b^{s+1} = \sum_{l=0}^{s+1} C_{s+1}^l a^l b^{s-l+1}.$$

Teiginys įrodytas ir sekančiam žingsniui, taigi jis teisingas ir visiems natūraliems skaičiams. $\oplus$

Jei šioje formulėje parinksime $a = b = 1$, tai gausime tokį sąryšį:

$$1. \quad 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n;$$

parinkę $a = 1, \ b = -1$ gauname, kad

$$2. \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots (-1)^n C_n^n = 0.$$

Tarkime, kad A kokia nors aibė ir $|A| = n$. Kiek galime sudaryti skirtingų šios aibės poaibių? Visų pirma sutarkime, kad $\emptyset$ yra visų aibių poaibis, be to laikysime, kad tuščių poaibių aibėje A yra $C_n^0 = 1$. Kiekvienas šios aibės elementas yra $1-$ elementis šios aibės poaibis. Taigi, vienaelemenčių poaibių yra tiek, kiek galima pasirinkti iš $n-$ elementės aibės po vieną elementą, t.y. C_n^1. Nesunku suprasti, kad dvielemenčių aibių iš viso yra C_n^2, t.y. tiek, kiek galima sudaryti junginių, kai tvarka nesvarbi, iš n po 2. Analogiškai samprotaujant gauname, kad $k-$ elemenčių aibių iš viso yra C_n^k, t.y. tiek, kiek galima sudaryti junginių, kai tvarka nesvarbi, iš n po k. Poaibių, kuriuose yra n elementų gali būti tik vienas- C_n^n. Sudėję visus šiuos skaičius gauname, kad visų aibės A, kurioje yra $n-$ elementų, poaibių skaičių, t.y.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^1 + C_n^n = 2^n.$$

7 Teorema *Teisinga lygybė*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}.$$

Po sumos ženklu esančios lygybės prasmė tokia: skaičiai $n_1, n_2, \ldots, n_m$ nepriklausomai viens nuo kito įgyja tokias sveikąsias neneigiamas reikšmes, kad būtų tenkinama po sumos ženklu esanti lygybė.

$\ominus$

Kairiąją teoremos formuluotės lygybės pusę perrašykime tokiu būdu:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \ldots (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$$

dauginami skliaustai n kartų. Atskliaudę dešiniosios pusės narius gausime tokius dėmenis:

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}, \tag{3}$$

be to visų rodiklių suma turi būti lygi n, kadangi kiekvienas dėmuo, kurio pavidalą esame užrašę, yra sudarytas iš n daugiklių, įskaitant ir pasikartojančius. Nesunku suprasti, kad dėmenys, kuriuose yra tie patys skirtingi nežinomieji su vienodais laipsniais nagrinėjamoje sumoje pasirodo ne vieną kartą, o jei dėmuo sudarytas iš vieno nežinomojo, tai jis bus sutinkamas tik kartą. Tad kiek kartų sutiksime dėmenį kuriame yra bent du skirtingi nežinomieji su kokiu nors fiksuotu laipsniu. Dėmenį perrašykime tokiu būdu

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m} = x_1 \ldots x_1 x_2 \ldots x_2 \ldots x_m \ldots x_m,$$

paskutinėje lygybėje daugiklis x_1 kartojasi n_1 kartą, x_2 kartojasi n_2 kartus ir t.t. x_m kartojasi n_m kartus. Bet kaip sukeitę vietomis paskutiniosios lygybės dešinės pusės daugiklius vietomis, gausime kitą nagrinėjamos lygybės dėmenį, tačiau jis bus analogiškas nagrinėtam. Kiek tokių sutampačių dėmenų yra? Tiek, keliais būdais galime sukeisti vietomis rinkinio, kuriame yra lygiai n elementų, kai pirmasis elementas kartojasi n_1 kartą, antrasis elementas kartojasi n_2 kartus ir t.t., $m-$ asis elementas kartojasi n_m kartų. Bet tai yra kėlinių su pasikartojimais skaičius, t.y.

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}.$$

Bet pastarasis skaičius nurodo (3) dėmens kai fiksuotas rinkinys $n_1, \ldots, n_m$ pasikartojimų skaičių sumoje. Tai ir reikėjo įrodyti.

$\oplus$

5.3 Binominių koeficientų savybės

Trikampę skaičių lentelę

$$\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

vadinsime *Paskalio trikampiu*.

Įrašę konkrečias derinių reikšmes gausime tokią lentelę:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 1 && 2 && 1 && \\ & 1 && 3 && 3 && 1 & \\ 1 && 4 && 6 && 4 && 1 \end{array}$$

....

Pastebėsime, kad naudota Paskalio lygybė galioja šiame trikampyje.

Be jau minėtų 5.2 skyrelyje 1. 2. binominių koeficientų savybių paminėsime dar kelias, dažniausiai naudojamas savybes:

3. $C_n^{n-k} = C_n^k$.
4. $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$. (Paskalio lygybė)
5. $C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{k+m-1}^k = C_{m+k}^{k+1}$.

Pirmoji lygybė išplaukia iš derinių skaičiaus C_n^k apibrėžimo. 2. lygybė buvo įrodyta 6. teoremoje. Trečiosios lygybės apibrėžimas išplaukia iš tokių rekurentinių sąryšių:

$$C_k^k = C_{k+1}^{k+1}, \quad C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} = C_{k+2}^{k+1}, \quad C_{k+2}^k + C_{k+2}^{k+1} = C_{k+3}^{k+1},$$

....

$$C_{k+m-1}^k + C_{k+m-1}^{k+1} = C_{k+m}^{k+1}.$$

$$6. \quad C_n^i C_i^m = C_n^m C_{n-m}^{i-m}.$$

Paskutiniosios lygybės teisingumą gauname iš tokių sąryšių:

$$C_n^i C_i^m = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{m!(i-m)!} = \frac{n!}{m!(i-m)!(n-i)!} =$$

$$\frac{n!(n-m)!}{m!(i-m)!(n-i)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{(n-m)!}{(i-m)!(n-i)!} = C_n^m C_{n-m}^{i-m}.$$

$$7. \quad \sum_{n=0}^{m} n C_m^n = m 2^{m-1}.$$

$$8. \quad C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}.$$

Įrodykime 7. lygybę. Tarkime, kad duota skaičių aibė $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Iš šios aibės sudarykime visus įmanomus poaibius. Aukščiau esame išsiaiškinę, kad iš šios aibės elementų galima sudaryti C_m^n, $n-$ mačių poaibių. Visuose šiuose poaibiuose bendrai paėmus yra

$$\sum_{n=0}^{m} nC_m^n$$

skaičių. Suskaičiuokime kitaip poaibiuose esančių elementų skaičių. Žinome, kad jei $|A| = m$,tai iš viso yra 2^m skirtingų aibės poaibių. Kiekvienas fiksuotas skaičius, tarkime 1 patenka ne į visus poaibius. Kadangi eliminavus vieną elementą iš likusių galima sudaryti 2^{m-1} poaibių, tai prie šių poaibių prijungę 1 gausime visus poaibius, kuriuose yra pašalintas elementas, šiuo atveju 1. Pastebėkime, kad visi elementai lygiaverčiai. Taigi, padauginę visų elementų skaičių iš poaibių, kuriose šis elementas yra, skaičiaus gausime, kad visuose poaibiuose yra $m2^{m-1}$ elementų.

7. sąryšis įrodytas.

Įrodykime 8. lygybę. Pastebėsime, kad binominis koeficientas C_{n+m}^k- reiškia galimybių, pasirinkti k elementų iš $m+n$, skaičių. Šiuos pasirinkimus realizuokime kiek kitu būdu: visų pirma pasirinkime i elementų iš pirmųjų m, o po to trūkstamus $k-i$ pasirinkime iš likusių n elementų. Sudėję visas šias pasirinkimų galimybes gausime ieškomosios lygybės įrodymą.

8. sąryšis įrodytas.

5.4 Rėčio metodas

Sakykime, kad X objektams yra būdingos savybės: $a_1, \ldots, a_n$. Kiekvienas iš šių X objektų gali turėti bent vieną iš nurodytų savybių arba ne. Simboliu $X(a_1, \ldots, a_n)$ žymėsime šių X objektų, turinčių savybes nurodytas skliaustuose, skaičių. Jei objektas neturi kurios nors iš savybių, tarkime a_1, tai objektų skaičių, be šios savybės žymėsime taip: $X(a_1', a_2' \ldots a_n')$.

8 Teorema (Rėčio metodas) *Objektų, kurie neturi visų išvardintų savybių, skaičius yra toks:*

$$X(a_1', \ldots, a_n') = X - \sum_{i=1}^{n} X(a_i) + \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-1} \sum_{i_2=2}^{n} X(a_{i_1}, a_{i_2}) - \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-2} \sum_{\substack{i_2=2,\\ i_2<i_3}}^{n-1} \sum_{i_3=3}^{n} X(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) +$$
$$\ldots + (-1)^n X(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{4}$$

Šioje sumoje nurodytos visos galimos savybių galimybės. Dešinės pusės dėmuo neigiamas, jei savybių skaičius nelyginis ir teigiamas- priešingu atveju.

Įrodymas. Taikysime indukcijos metodą, savybių skaičiaus atžvilgiu.

Tarkime, kad nagrinėjami objektai turi vieną savybę, t.y. tegu $n = 1$. Tada iš viso objektų skaičiaus atėmę objektų, kurie turi šią savybę, skaičių gausime objektų, kurie neturi šios savybės, skaičių, t.y.

$$X(a_1') = X - X(a_1).$$

Taigi, pirmam indukciniam žingsniui formulė yra teisinga.

Darome indukcinę prielaidą, kad formulė yra teisinga, kai nagrinėjami objektai turi $n-1$ savybę. Taigi, laikome kad lygybė

$$X(a'_1, \ldots a'_{n-1}) = X - \sum_{i=1}^{n-1} X(a_i) + \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-2} \sum_{i_2=2}^{n-1} X(a_{i_1}, a_{i_2}) - \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-3} \sum_{\substack{i_2=2,\\ i_2<i_3}}^{n-2} \sum_{i_3=3}^{n-1} X(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) +$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} X(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}). \tag{5}$$

teisinga. Parodykime, kad ji teisinga ir sekančiam žingsniui t.y., kad prijungus papildomą savybę formulė, kuria remiantis skaičiuojame objektų, neturinčių savybių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skaičių, yra analogiška.

Pastebėkime, kad (5) formulės kairioji pusė reiškia objektų, kurie turi savybę a_n, bet neturi savybių $a_1, \ldots, a_{n-1}$, skaičių. Bet tada (5) lygybės kairėje ir dešinėje pusėje prie kiekvienos funkcijos $X(\ldots)$ skaičiuojančios objektų skaičių, turinčių tam tikras savybes argumentų pridedame papildomą savybę a_n. Gauname, kad

$$X(a'_1, \ldots a'_{n-1}, a_n) = X(a_n) - \sum_{i=1}^{n-1} X(a_i, a_n) + \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-2} \sum_{i_2=2}^{n-1} X(a_{i_1}, a_{i_2}, a_n)$$

$$- \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-3} \sum_{\substack{i_2=2,\\ i_2<i_3}}^{n-2} \sum_{i_3=3}^{n-1} X(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_n) +$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} X(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n). \tag{6}$$

Atkreipsime dėmesį, kad jei iš objektų, neturinčių pirmųjų $n-1$ savybių, atmetę tuos objektus, kurie turi savybę a_n gausime skaičių objektų, kurie neturi visų $a_1, \ldots, a_n$ savybių, formaliai:

$$X(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = X(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}) - X(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}, a_n).$$

Atėmę (5) ir (6) lygybių kairiąsias ir dešiniąsias puses (naudojame indukcinę prielaidą) bei pasinaudoję paskutiniąja lygybe gauname, kad

$$X(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = X(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}) - X(a'_1, a'_2, \ldots, a'_{n-1}, a_n) =$$

$$X - \sum_{i=1}^{n-1} X(a_i) + \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-2} \sum_{i_2=2}^{n-1} X(a_{i_1}, a_{i_2}) - \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-3} \sum_{\substack{i_2=2,\\ i_2<i_3}}^{n-2} \sum_{i_3=3}^{n-1} X(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}) + \ldots$$

$$+(-1)^{n-1} X(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) - \Big(X(a_n) - \sum_{i=1}^{n-1} X(a_i, a_n) + \sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-2} \sum_{i_2=2}^{n-1} X(a_{i_1}, a_{i_2}, a_n)$$

$$-\sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-3}\sum_{\substack{i_2=2,\\ i_2<i_3}}^{n-2}\sum_{i_3=3}^{n-1}X(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3},a_n)+\ldots+(-1)^{n-1}X(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n)\Big)=$$

$$X-\sum_{i=1}^{n}X(a_i)+\sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-2}\sum_{i_2=2}^{n}X(a_{i_1},a_{i_2})-\sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-2}\sum_{\substack{i_2=2,\\ i_2<i_3}}^{n-1}\sum_{i_3=3}^{n}X(a_{i_1},a_{i_2},a_{i_3})+\ldots$$

$$+(-1)^nX(a_1,a_2,\ldots,a_n).$$

$\oplus$

Pateiksime keletą šio metodo taikymo pavyzdžių.

1. Tarkime, kad elementų su nurodytomis savybėmis skaičius $X(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ priklauso ne nuo pačių savybių, o tik nuo jų skaičiaus, t.y.

$$X(a_1)=\ldots=X(a_n)=X_1,\ X(a_{i_1},a_{i_2})=X_2,\ \ldots,X(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})=X_n,$$

$1\le i_1<i_2\le n.$

Pastebėsime, kad šiuo atveju $\sum\limits_{i=1}^{n}Xa_i=C_n^1X_1$ ir

$$\sum_{\substack{i_1=1,\\ i_1<i_2}}^{n-1}\sum_{i_2=2}^{n}X(a_{i_1},a_{i_2})=X_2C_n^2$$

ir t.t..

Tada rėčio formulę galime perrašyti tokiu būdu:

$$X(a'_{i_1},\ldots,a'_{i_n})=X-C_n^1X_1+C_n^2X_2-\ldots+(-1)^nX_n. \tag{7}$$

2. Tarkime, kad P_n yra kėlinių, kurie sudaromi iš pradinės aibės $\{1,2,3,\ldots,\}$ elementų skaičius ($P_n=n!$). Pažymėkime simboliu D_n, $n-$ elemenčių kėlinių, kuriuose nė vienas elementas nelieka pradinėje padėtyje, skaičių. Pavyzdžiui, tarkime, kad pradinė aibė $\{1,2,3\}$. Tada $P_3=3!=6$ ir $D_3=2$ (patikrinkite). Apibrėžkime savybę a_i- tokiu būdu: elementas i lieka savo vietoje. Tada $X(a_i)$ yra kėlinių, kuriuose $i-$ asis elementas lieka vietoje skaičius, o $X(a_{i_1},a_{i_2},\ldots a_{i_k})$, $1\le i_1<i_2<\ldots i_k\le n$ yra kėlinių, kuriuose elementai $i_1,i_2,\ldots,i_k$ pasilieka savo vietoje, skaičius.

Nesunku suprasti, kad tuomet

$$X(a_{i_1},a_{i_2},\ldots a_{i_k})=P_{n-k},\ 1\le i_1<i_2<\ldots i_k\le n.$$

Taikydami (7) formulę gauname, kad

$$D_n=X(a'_{i_1},\ldots,a'_{i_n})=P_n-C_n^1P_{n-1}+C_n^2P_{n-2}-\ldots+(-1)^nP_0=$$

$$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Skaičiai D_n yra vadinami *subfaktorialais*.

3. Tarkime, kad $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yra aibės A poaibių sistema. Pažymėkime $S(i) = |A_i|$ ir $S(i_1, \ldots, i_k) = |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$, $1 \le k \le n$. Be to

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} S(i); \quad S_k = \sum_{(k)} S(i_1, \ldots, i_k).$$

Simbolis $\sum\limits_{(k)} \ldots$ reiškia, kad sumuojama pagal visus skirtingus indeksų aibės $\{1, \ldots, n\}$ poaibius $\{i_1, \ldots, i_k\}$. Beje, tokių dėmenų skaičius yra lygus C_n^k.

Teisingos lygybė:

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = |A| - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n; \tag{8}$$

Pastaroji lygybė- rėčio teoremos išvada.

5.5 Stirlingo skaičiai

1. Tarkime, kad yra n skirtingų objektų, kuriuos reikia patalpinti į m dėžių tokiu būdu, kad paskirstymas tenkintų papildomus reikalavimus. Kiek tokių išdėstymų iš viso galėtų būti? Tokio pobūdžio uždaviniai vadinami urnų uždaviniais.

2. Sakykime, kad X, Y dvi baigtinės aibės. $|X| = n$, $|Y| = m$, $f : X \to Y$. Pastebėsime, kad jei aibė baigtinė, tai ši aibė ekvivalenti natūraliųjų skaičių intervalui. Vadinasi baigtinė aibė gali būti sunumeruota ir tuo pačiu metu sutvarkyta. Taigi, bijekcijos tikslumu, visas baigtines aibes galime sutapatinti su natūraliųjų skaičių intervalu. Tad nemažindami bendrumo galime laikyti, kad

$$X = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad Y = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad f(X) = \{f(1), \ldots, f(n)\},$$
$$1 \le f(i) \le m, \;\; D(f) = X. \tag{9}$$

Kiek yra totalių funkcijų, kurios tenkina šiuos reikalavimus?

Kiek yra būdų paskirstyti n objektų į m dėžes? Pastarąją problemą, naudodami funkcijos terminologiją galime aprašyti tokiu būdu: $f(i) = k$, $\quad i \in X$, $k \in Y$. Taigi, funkcija yra taisyklė, kuri aprašo aibės X elementų išdėstymo į dėžes $1, \ldots, m$ principą. Kitaip tariant, kiekvienam elementui priskiriame dėžę tuo pačiu sudarome $n-$ elemenčius junginius.

Pastebėsime, kad atsakymas į pirmąjį klausimą jau buvo pateiktas, t.y. jei norime sudaryti $n-$ elemenčius junginius iš $m-$ elementės aibės elementų (kurie gali ir kartotis). Taigi, ieškomas skirtingų gretinių su pasikartojimais iš m po n skaičius yra

$$\overline{A}_n^m = m^n.$$

Matome, kad skirtingų funkcijų yra tiek, kiek yra n ilgio žodžių, kai abėcėlėje yra m simbolių. Beje, tai atsakymas ir į antrąjį klausimą. Skaičius skirtingų funkcijų $f: X \to Y$, jei $D(f) = X$ yra toks pat.

Panagrinėkime, kiek yra skirtingų siurjekcijų, kai $f: X \to Y,\ \ D(f) = X,\ E(f) = Y$. Beje, jei šis atvaizdis yra funkcija, tai $m \leq n$. Pasinaudokime rėčio metodu. Pažymėkime simboliu A_1 aibę, kurią sudaro tie atvaizdžiai $f: X \to Y$, kurie neįgyja 1. Tokių atvaizdžių yra $(m-1)^n$. Pažymėkime simboliu $A_i \cap A_j$ atvaizdžių aibę, kurie neįgyja reikšmių i ir j. Tada,

$$|A_i \cap A_j| = (m-2)^n.$$

Ir pagaliau, sankirtą $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ sudaro tie atvaizdžiai, kurie neįgyja reikšmių $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Tada

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n.$$

Nagrinėjamoji siurjektyvių funkcijų aibę aprašome tokiu būdu:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n.$$

Naudodamiesi (8) gauname, kad siurjekcijų skaičius yra lygus:

$$S = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = m^n - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^n S_n.$$

Pastebėję, kad $S_i = (m-i)^n C_m^i$ gauname, kad

$$Q(n,m) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (m-k)^n C_m^k. \tag{10}$$

Taigi, paskutinioji suma yra ieškomasis siurjekcijų skaičius. Šis skaičius vadinamas *pirmos rūšies Stirlingo skaičiumi.*

9 Teorema Tarkime, kad funkcijos apibrėžtos (9) sąryšiais. Tada griežtai monotoninių funkcijų skaičius yra lygus C_m^n, o monotoninių funkcijų skaičius yra lygus C_{m+n-1}^n.

Sakykime, kad baigtinėje aibėje A yra n elementų. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Aibės A netuščių poaibių sistemą $A_i,\ \ i \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ vadinsime aibės A *skaidiniu k-blokais*, jei $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ ir

$$A = A_{j_1} \cup \ldots \cup A_{j_k},\ \ 1 \leq k \leq n.$$

Pažymėkime simboliu $S(n,k)$ visų aibės A skaidinių $k-$ blokais skaičių. Šis skaičius yra vadinamas *antros rūšies Stirlingo skaičiumi* .

Paprastai laikoma, kad $S(0,0) = 1$. Be to

$$S(n,0) = 0,\ m > 0;\ \ S(n,n) = 1,\ \ \ S(n,m) = 0,\ m > n.$$

10 Teorema *Teisinga lygybė:*

$$S(n,m) = S(n-1, m-1) + mS(n-1, m).$$

$\ominus$

Sakykime, kad $\mathcal{B}$ yra visų aibės A, $|A| = n$ skaidinių m blokais aibė. Apibrėžkime du šios aibės poaibius tokiu būdu:

$$\mathcal{B}_1 := \{X \in \mathcal{B}; \exists B \in X, B = \{n\}\}, \mathcal{B}_2 := \{X \in \mathcal{B}; \overline{\exists} B \in X, B = \{n\}\}.$$

Iš šių poaibių apibrėžimo išplaukia, kad pirmąjam poaibiui priklauso skaidiniai, kuriuose vienas skaidinys būtinai sudarytas tik iš elemento n. Skaidiniui $\mathcal{B}_2$ priklauso visi kiti skaidiniai. Aišku, kad $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ir $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Suskaičiuokime šių poaibių elementų skaičių. Pirmąjį poaibį t.y. $\mathcal{B}_1$ sudarantys $m-$ skaidiniai turi tą patį skaidinio elementą $\{n\}$. Vadinasi, visus šio poaibio elementus (skaidinius) gausime sudarydami aibės $\{1, 2, \ldots, n-1\}$,$m-1$ elemenčius blokų skaidinius. Vadinasi

$$|\mathcal{B}_1| = S(n-1, m-1).$$

Visi poaibio $\mathcal{B}_2$ skaidiniai gaunami tokiu būdu: sudarome visus aibės $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ m-blokus ir paeiliui į kiekvieną bloką patalpiname elementą n. Taigi

$$|\mathcal{B}_2| = mS(n-1, m).$$

Pastebėję, kad

$$S(n, m) = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2|,$$

gauname teoremos įrodymą.

$\oplus$

Rasime formulę skaičiams $S(n, k)$ skaičiuoti. Tarkime, kad siurjektyvios funkcijos $f : A \to \{1, 2, 3, \ldots, k\}$,$D(f) = A$. Naudodamiesi (10) lygybe turime, kad siurjektyvių funkcijų skaičius yra

$$Q(n, k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (k-i)^n C_k^i.$$

Fiksavę funkciją, suskaidykime funkcijos apibrėžimų sritį nesikertančiomis aibėmis tokiu būdu:

$$A_i = f^{-1}(i), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{11}$$

Gauname funkcijos apibrėžimo srities $k-$ blokų skaidinį:$A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Aišku, kad kiekviena siurjekcija apibrėžia vienintelį aibės A, $k-$ blokų skaidinį. Antra vertus, fiksavus bet kokį aibės A $k-$ blokų skaidinį, su šiuo skaidiniu galime susieti $k!$ siurjekcijų. Vadinasi skirtingų siurjekcijų, tenkinančių (11) yra tiek, kiek skirtingų aibės $\{1, 2, \ldots, k\}$ kėlinių. Tada siurjekcijų skaičių (pirmos rūšies Stirlingo skaičių) galime išreikšti antros rūšies Sirlingo skaičiumi tokiu būdu:

$$Q(n, k) = S(n, k)k!.$$

Tada ieškomasis antros rūšies Stirlingo skaičius yra toks:

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}Q(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(k-i)^n C_k^i.$$

Belo skaičiumi $B(n)$ vadinsime aibės $A = \{1,\ldots,n\}$ $k-$ blokų skaidinių $k = 1,\ldots,n$ sumą,t.y.

$$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Laikoma, kad $B(0) := 1$.

Be rodymo pateiksime vieną rezultatą.

Teorema *Teisinga lygybė:*

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i B(i).$$

5.6 Junginių kombinatorika

Šiame skyrelyje nagrinėsime įvairius, junginių sudarymo principus, bei skaičiuosime junginių skaičių.

1. Tarkime, kad yra n skirtingų objektų, bei k dėžių. Laikykime, kad pirmoje dėžėje turi būti patalpintas n_1 objektas, it t.t. $k-$ oje dėžėje turi būti patalpinta n_k objektų, kai $n_1 + \ldots + n_k = n$. Keliais būdais po šias k dėžes galima paskirstyti po nurodytą elementų skaičių? Pastebėsime, kad į pirmąją dėžę galime parinkti $C_n^{n_1}$ elementų ir t.t. į paskutiniąją dėžę- $C_n^{n_k}$ elementų. Naudodamiesi daugybos taisykle gauname, kad iš viso tokių suskirstymų į dėžes yra toks skaičius:

$$C_n^{n_1}C_n^{n_2}\ldots C_n^{n_k}.$$

Pastebėsime, kad šis skaičius yra lygus $P_n(n_1,\ldots,n_k)$. Naudodamiesi kėlinių su pasikartojimais formule pastarąjį uždavinį galime suformuluoti tokiu būdu: *yra iš viso n objektų, kuriuos suskirstome į k skirtingas rūšis, kai kiekvienos rūšies objektų yra n_1, n_2, ..., n_k,* t.y. $n_1 + \ldots + n_k = n$. Tada iš šių objektų galima sudaryti $P_n(n_1,\ldots,n_k)$ skirtingų kėlinių. Matome, kad šie du uždaviniai siejasi, kadangi kiekvieną kėlinį galime skirtyti į k klasių, kai į pirmąją klasę patenka numeriai vietų, kurias užima pirmo tipo objektai ir t.t. į $k-$ ąją klasę patenka numeriai vietų, kurias užima $k-$ ojo tipo objektai.

2. Sakykime, kad yra n_1 pirmosios rūšies objektas, n_2- antrosios rūšies objektai ir t.t. n_k- k-osios rūšies objektai. Tada skaičius būdų, paskirstyti šiuos objektus į dvi dėžes lygus

$$(n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1).$$

Jei pareikalausime, kad kiekvienoje dėžėje būtų ne mažiau negu s_i, $i-$ osios rūšies objektų, tai analogiškas skaičius bus lygus

$$(n_1 - 2s_1 + 1)(n_2 - 2s_2 + 1) \dots (n_k - 2s_k + 1).$$

3. Sakykime, kad į k dėžių reikia paskirstyti n vienodų objektų. Kiek yra skirtingų būdų atlikti šiuos paskirstymus. Spręskime šį uždavinį tokiu būdu: išdėstę šiuos objektus į eilę, $k-1$ tarpu suskirstykime šiuos objektus į k grupių. Tai ir bus vienas iš mums tinkamų suskirstymų. Kadangi tarpų padėtis objektų atžvilgiu svarbi (nuo to priklauso elementų skaičius dėžėje), tai turėsime kėlinį su pasikartojimais iš $n+k-1$ elemento, kai yra dvi skirtingų elementų grupės, kuriose yra n ir $k-1$ elementų. Taigi, šiuo atveju junginių skaičius bus lygus

$$P_{n+k-1}(n, k-1) = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!} = C_{n+k-1}^{k-1}.$$

Tarkime, kad pirmosios rūšies objektų skaičius yra lygus n_1, antrosios- n_2 ir t.t. $k-$ osios n_k. Keliais skirtingais būdais galima išskirstyti šiuos objektus į s dėžių. Remdamiesi aukščiau nagrinėta problema gauname, kad pirmosios rūšies objektus galima išskirstyti po s dėžių $C_{n_1+s-1}^{n_1}$ ir t.t. $k-$ osios rūšies objektus galima išskirstyti po s dėžių $C_{n_k+s-1}^{n_k}$. Tada bendras išskirstymų po dėžes skaičius yra lygus:

$$C_{n_1+s-1}^{n_1} \dots C_{n_k+s-1}^{n_k}.$$

Panagrinėkime situaciją, kai kiekvienoje iš dėžių bus bent po vieną objektą. Pasielkime tokiu būdu: išdėstome objektus į eilę. Tarp šių objektų bus $n-1$ tarpas. Tarp šių $n-1$ tarpo, pasirinkę $k-1$ tarpą, mes tuo pačiu nepasirinktus tarpus pašalinę gauname vieną elementų išdėstymą į dėžes. Taigi, tokių išdėstymų skaičius lygus

$$C_{n-1}^{k-1}.$$

Aptarkime analogišką situaciją papildomai tardami, kad objektai yra skirtingi be to yra svarbi objektų išsidėstymo tvarka pasirinktose dėžėse. Laikome, kad visi n objektai yra skirtingi. Žinome, kad skirtingų kėlinių iš n objektų galima sudaryti $n!$. Aukščiau nagrinėjome, kad paskirstyti n vienodų objektų po k dėžių skaičius yra lygus C_{n+k-1}^{k-1}. Tada nagrinėjamas paskirstymų skaičius, remiantis daugybos taisykle, yra lygus $n!C_{n+k-1}^{k-1} = A_{n+k-1}^{k-1}$. Visiškai analogiškai sprendžiame uždavinį, kai kiekvienoje dėžėje bus bent po vieną objektą. Tada skirtingų paskirstymų po dėžes skaičius yra $n!C_{n-1}^{k-1} = A_{n-1}^{k-1}$.

Panagrinėkime bendresnį uždavinį t.y. apskaičiuokime *kiek skirtingų paskirstymų po dėžes galime sudaryti, kai yra n skirtingų objektų, kurie yra skirstomi po k dėžių, kai nebūtinai visi objektai yra pasirenkami.*

Suskirstykime šiuos paskirstymus priklausomai nuo to, kiek objektų yra pasirinkta. Jei buvo pasirinkta s objektų, tai iš šių pasirinktų objektų galima sudaryti A_{s+k-1}^{s} paskirstymų po k dėžes. Kita vertus pasirinkti s iš n yra C_n^s galimybių, tai skirtingų paskirstymų, kuriuose yra s objektų skaičius lygus $C_n^s A_{s+k-1}^{s}$. Tada visų paskirstymų skaičius yra toks:

$$\sum_{s=0}^{n} C_n^s A_{s+k-1}^{s}.$$

Jei pareikalausime, kad kiekvienoje dėžėje būtų bent vienas objektas, tai tokių paskirstymų skaičius bus lygus

$$\sum_{s=k}^{n} C_n^s C_{s-1}^{k-1} s!.$$

4. Panagrinėkime natūralaus skaičiaus skirstymo į dėmenis problemą. Tarkime, kad nagrinėjame skirtingus skaičius $n_1, \ldots, n_k$, $\quad n_1 + \ldots + n_k = N$. Keliais būdais galime sudaryti sumą $n_1+\ldots+n_k = N$, jei dėmenų išsidėstymo tvarka yra svarbi, t.y. laikysime du užrašymo būdus skirtingais, jei bent du elementai sumoje yra skirtingose vietose. Simboliu $f(N)$ pažymėkime skaičių būdų, kuriais galime sudaryti minėtą sumą iš skaičių $n_1, \ldots, n_k$, kai dėmenų tvarka yra svarbi. Fiksuokime vieną skaičiaus N užrašymą dėmenimis laikydami, kad paskutinysis dėmuo yra n_i. Aišku, kad be šio dėmens likusi suma lygi $N - n_i$. Bet tada, skaičius būdų, kuriais užrašome skaičių N, kai paskutinysis dėmuo yra n_i yra lygus $f(N - n_i)$. Pakartoję šiuos samprotavimus, kai fiksuojame visus $i \in \{1, \ldots, k\}$ bei taikydami junginių sumavimo taisyklę gauname, kad

$$f(N) = \sum_{i=1}^{n} f(N - n_i). \tag{12}$$

Laikysime, kad $f(N) = 0$ kai $N < 0$ ir $f(0) = 1$.

Tarkime, kad $n_1 = 1, \ldots, n_k = k$. Nagrinėsime skaičiaus N išskaidymus dėmenimis, kai dėmenų tvarka svarbi. Remdamiesi aukščiau užrašytu sąryšiu turime, kad

$$\phi(N-1) = \sum_{i=1}^{n} \phi(N-1-i).$$

Tada

$$\phi(N-1) = 2\phi(N-1) - \phi(N-k-1).$$

Jei dėmenų skaičius lygus s, tai gauname, kad skaičių N galime išskaidyta s dėmenų suma C_{N-1}^{s-1}. Tada

$$\phi(N) = C_{N-1}^{0} + C_{N-1}^{1} + \ldots + C_{N-1}^{N-1} = 2^{N-1}.$$

Taigi, natūrinį skaičių N dėmenimis (kai atsižvelgiama į dėmenų išdėstymo tvarką) galima išskaidyti 2^{N-1} būdais.

5. Tarkime, kad siunčiamas pranešimas, kuris koduojamas kelių tipų signalais. Tegu pirmojo tipo signalo perdavimo trukmė lygi t_1 vienetų skaičiui, antrojo tipo-t_2 laiko vienetų skaičiui ir t.t. $k-$ ojo tipo -t_k vienetų skaičiui. *Kiek skirtingų pranešimų galima perduoti šiais signalais per T laiko vienetų?* Laikome, kad sudarant pranešimą nebegalima papildomai prijungti signalo, nepereikvojant laiko T. Simboliu $f(T)$ pažymėkime pranešimų, kurių siuntimo trukmė T, skaičių. Naudodamiesi (x_1) formule gauname, kad šių pranešimų skaičius lygus

$$f(T) = f(T - t_1) + \ldots + f(T - t_k); \quad f(T) = 0,\ T < 0; \quad f(0) = 1.$$

6. Panagrinėkime dar vieną skaičiaus užrašymo dėmenimis problemą. Pažymėkime simboliu $f(m, N)$ skaičiaus N suskirstymo į m dėmenų galimybių skaičių, t.y. keliais būdais galima užrašyti duotą skaičių m dėmenimis, jei dėmenis galima pasirinkti iš skaičių aibės $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad

$$f(m, N) = f(m-1, N-n_1) + \ldots + f(m-1, N-n_k).$$

Tada, kai $n_i = i$ gauname skaičiaus N užrašymo m dėmenimis nagrinėtos problemos atskirą atveju, kai paskutinėje formulėje $n_i = i$.

7. Skaičiaus užrašymas dėmenimis, kai dėmenų tvarka nesvarbi. Tegu $f(n_1, \ldots n_k, N)$ žymi skaičiaus N išskaidymą aibės $\{n_1, \ldots, n_k\}$, kurių nors nesikartojančių elementų suma, būdų skaičių.

Visus skaičiaus N suskaidymus dėmenimis suskirstykime į dvi klases- tas, kuriose yra elementas n_k ir tas, kuriose nėra elemento n_k. Tada bendrą išskaidymų skaičių galime užrašyti tokiu būdu:

$$f(n_1, \ldots, n_k; N) = f(n_1, \ldots, n_{k-1}; N-n_k) + \ldots + f(n_1, \ldots, n_{k-1}; N).$$

Tęsdami šį procesą gausime formulę, kurioje reikės išspręsti nulinės sumos išskaidymo uždavinį arba vieno skaičiaus užrašymo tuo pačiu skaičiumi uždavinį. Šie paskutinieji uždaviniai išsprendžiami vienareikšmiškai, be to gana dažnai tenka daug dėmenų praleisti, kadangi jei $n_1 + \ldots + n_k < N$, tai $f(n_1, \ldots, n_k) = f(n_1, \ldots, n_k; N) = 0$, nes suma mažesnė negu N, o jei $n_k > N$, tai

$$f(n_1, \ldots, n_k; N) = f(n_1, \ldots, n_{k-1}; N).$$

Sakykime, kad skaičių N užrašysime skaičių $1, 2, \ldots, n$ skirtingais dėmenimis (dėmenų tvarka nėra svarbi). Pažymėkime šių skirtingų išraiškų skaičių simboliu Φ_N^n. Remiantis ankščiau pateiktais samprotavimais gauname, kad

$$\Phi_N^n = \Phi_N^{n-1} + \Phi_{N-m}^{n-1}, \quad \Phi_0^n = 1.$$

Panagrinėkime bendresnį atvejį, t.y. tarkime, kad dėmenys gali kartotis. Tegu Ψ_N^n žymi skaičių visų galimų skaičiaus N išraiškų skaičių, kurie yra tarp skaičių $1, 2, \ldots, n$. Tada

$$\Psi_N^n = \Psi_N^{n-1} + \Psi_{N-m}^n.$$

Pastebėsime, kad iš viso, skaičių N suskirstyti dėmenimis yra Ψ_N^N galimybių, o suskirstyti skirtingais dėmenimis yra Φ_N^N galimybių.

5.7 Rekursija. Katalano skaičiai

Spręsdami junginių sudarymo bei jų skaičiaus nustatymo uždavinius dažnai pradinį uždavinį keisdavome kombinatoriniu uždaviniu, kuriame tekdavo nagrinėti objektus su mažesniu objektų skaičiumi. Pradinio uždavinio keitimą analogiškais uždaviniais, kuriuose nagrinėjamų objektų skaičius mažesnis vadinsime *rekursijos metodu.* Paprastai naudojant rekursijos sąryšį, spręsdami uždavinį, kuriame yra n objektų, keičiame uždaviniu, kuriame yra $n-1$ objektas, o pastarąjį keičiame uždaviniu kuriame yra $n-2$ objektai ir t.t. Tokiu būdu mes arba supaprastiname pradinio uždavinio sprendimą ar gauname formulę, kurios dėka galime skaičiuoti $n-$ ojo žingsnio sąryšius, naudodamiesi fiksuotais dydžiais bei sąryšiais, kuriuose figūruoja žingsnis n. Pavyzdžiui, skaitytojui gerai žinoma aritmetinės progresijos $n-$ ojo nario formulė: $a_n = a_1 + d(n-1)$ arba aritmetinės progresijos $n-$ narių sumos formulė: $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n-$ yra rekursijos pavyzdžiai.

Naudodamiesi rekursija (bei kitomis kombinatorinėmis taisyklėmis) galime įrodyti daug kombinatorinių formulių. Pateikime pavyzdį. Tarkime kad aibėje yra n skirtingų skaičių $\{1, 2, \ldots, n\}$. Žinome, kad iš šios aibės elementų galima sudaryti $n!$ skirtingų kėlinių. Įrodykime šią kėlinių skaičiavimo formulę naudodami rekursiją. Simboliu P_n pažymėkime pradinės aibės skirtingų kėlinių skaičių. Pastebėsime, kad jei fiksuosime kurį nors elementą, tarkime n, tai su bet kuriuo $n-1$ elemenčiu kėliniu kombinuodami šį elementą gausime n skirtingų n elemenčių kėlinių. Taigi, $P_n = nP_{n-1}$. Toliau analogišku būdu nagrinėdami $n-1$ elementę aibę gauname, kad $P_{n-1} = (n-1)P_{n-2}$. Taigi $P_n = n(n-1)P_{n-2}$. Nesunku suprasti, kad $P_n = n(n-1)\ldots 2P_1$. Bet $P_1 = 1$. Gauname, kad $P_n = n!$

Panagrinėsime vieną klasikinį uždavinį, kuris susijęs su rekursijos metodu. Italų mąstytojas Fibonači 1202 metais pasiūlė tokį uždavinį:

Triušių pora kas mėnesį susilaukia dviejų palikuonių (patinėlio ir patelės), o pastaroji jauniklių pora po dviejų mėnesių taip pat susilaukia analogiško prieauglio kaip ir ankstesnė. Kokia triušių banda bus po metų, jei metų pradžioje turėjome vieną triušių porą?

Pradinė pora po mėnesio susilaukia poros jauniklių, todėl po mėnesio turėsime dvi poras, po dviejų- tris poras po keturių penkias poras ir t.t. Formalizuokime šį uždavinį. Tarkime, kad po n mėnesių turėsime $F(n)$ triušių porų. Tada po $n+1$ mėnesio turėsime tas pačias $F(n)$ poras bei papildomas $F(n-1)$ poras, kurias atsivedė vyresni negu mėnuo triušiai. Taigi

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1), \quad \text{kai} \quad F(0) = 1,\ F(1) = 2.$$

Matome, kad naudodamiesi šia rekursine formule galime rasti (nuosekliai skaičiuodami) triušių skaičių po bet kokio laikotarpio. Skaičiai $F(n)$ vadinami *Fibonačio skaičiais.* Išreikškime šiuos skaičius binominiais koeficientais. Sudarykime vienetų-nulių sekas, kurios koduotų vienos triušių poros palikuonius. Tiksliau kalbant, priskirkime seką triušių porai remdamiesi taisykle: vienetus priskiriame tiems mėnesiams, kuomet gimė protėvių pora, o nuliai reiškia genealoginio medžio pertrūkį. Pavyzdžiui seka 0010010100010 koduoja tokį genealoginį medį: pradinė pora trečio mėnesio pabaigoje pagimdė porą, kuri yra tėvai poros, gimusios šeštojo mėnesio pabaigoje, o pastrieji yra tėvai poros, gimusios aštunto mėnesio pabaigoje, kurie yra tėvai dvyliktojo mėnesio pabaigoje gimusiai porai. Tiksliau kalbant, šis kodas yra poros, gimusios dvylikto mėnesio pabaigoje genealoginis medis. Pastebėsime, kad šioje sekoje du vienetai niekada nebus šaliai, kadangi gimusi pora vieną mėnesį palikuonių nesusilaukia. Pradinė triušių pora yra koduojama nuline seka $0000000000\cdots 0$. Fiksuokime n. Tada visų n ilgio sekų, kai du vienetai nėra šalia skaičius yra lygus $F(n)$. Parodykime, kad

$$(13) \qquad F(n) = C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-p+1}^p, \quad p = \begin{cases} \frac{n+1}{2},\ n = 2k+1 \\ \frac{n}{2},\ n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathcal{N}.$$

Tegu $k \in \mathcal{N}$, $0 \leq k \leq [n+1/2]$. Panagrinėkime n ilgio sekas, kuriose k vienetų ir $n-k$ nulių, be to du vienetai nėra greta. Tokio pobūdžio rinkinius esame nagrinėję. Fiksuotam n ir k tokių sekų skaičius yra C_{n-k+1}^k. Taikydami junginių sudėties taisyklę, kai $0 \leq k \leq [n+1/2]$ gauname formulę (13).

Tarkime, kad aibėje yra n elementų ir be to ši aibė tiesiškai sutvarkyta. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad šią aibę sudaro elementai $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Padalykime aibę A elementu m į du nesikertančius poaibius B_1^1, B_1^2 laikydami, kad $m \in B_1^1$, ir $B_1^2 = \{m+1, \ldots, n\}$ Antrame žingsnyje, kiekvieną poaibį B_1^i skaidome du poaibius analogišku būdu, laisvai pasirinkdami elementus poaibiuose. Jei poaibyje yra vienas elementas, tai šis poaibis nebeskaidomas. Ir šį skaidymo procesą baigsime, kai visi aibės A nesikertantys poaibiai turės po vieną elementą. Kyla natūralus klausimas: *Kiek galima sudaryti skirtingų dalinimų į poaibius procesų, jei du dalinimo procesai laikomi skirtingais, kai bent viename žingsnyje gauname skirtingi rezultatai* . Žinoma, galutinis rezultatas visada toks pat! Tad kiek skirtingų dalinimo į poaibius nurodytu būdu procesų yra?

Tarkime, kad aibėje A yra $n+1$ elementas. Simboliu B_n, $n \in \mathcal{N}_0$ pažymėkime šios aibės, skirtingų dalinimų į poaibius procesų skaičių. Pirmame žingsnyje egzistuoja lygiai n aibės A padalinimų į du nesikertančius poaibius. Jei pirmame poaibyje yra i elementų, tai antrame poaibyje bus $n+1-i$ elementų, $i = 1, 2, \ldots, n$. Suskirstykime skaidymo procesus į klases priklausomai nuo pirmąjame skaidymo žingsnyje pirmame poaibyje esančių elementų skaičiaus. Kadangi pirmame poaibyje gali būti 1, 2, $\ldots$, n elementų, todėl turėsime iš viso n skirtingų skaidymo procesų klasių. Taigi, $s-$ ąjai klasei priklauso tie skaidymo procesai, kurių pirmasis poaibis B_1^1 turi lygiai s elementų. Tad kiek skaidymo procesų priklauso $s-$ ąjai klasei? Fiksuokime s. Kadangi pirmąjame žingsnyje $|B_1^1| = s$, tai skaidydami šį poaibį toliau gauname, B_{s-1} skirtingų skaidymo procesų. Pastebėkime, kad antroje dalyje yra $n-s+1$ elementų, todėl šiam poaibiui skirstyti yra B_{n-s} skaidymo procesų. Remdamiesi junginių daugybos taisykle gauname, kad $s-$ ąjai klasei priklauso $B_{s-1}B_{n-s}$ skirtingų skaidymo procesų. Remdamiesi junginių sudėties taisykle gauname, kad visų skaidymo procesų klasių skaičius yra:

$$B_n = B_0 B_{n-1} + B_1 B_{n-2} + \ldots + B_{n-1} B_0.$$

Taigi, skirtingų skaidymo procesų skaičiui rasti gavome rekursinį sąryšį. Pastebėsime, kad $B_n = S(n, 2)$. Be įrodymo pateiksime tokį rezultatą: $B_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Panagrinėkime vieną pavyzdį, kuris susijęs su paskutiniuoju uždaviniu. *Tarkime, kad į apskritimą įbrėžtas taisyklingas $2n-$ kampis. Kiek yra būdų sujungti šio daugiakampio viršūnes nesikertančiomis atkarpomis?* Simboliu $F(n)$ pažymėsime būdų skaičių sujungti daugiakampio viršūnes nesikertančiomis atkarpomis. Jei $n = 0$, tai laikysime, kad $F(0) = 1$. Kai $n = 1$, tai turėsime atkarpą, kurią vadinsime taisyklingu dvikampiu, šiuo atveju $F(1) = 1$. Kai $n = 2$, tai turėsime kvadratą. Šiuo atveju $F(2) = 2$. Sudarykime rekurentinį sąryšį, kurį tenkina $F(n)$. Tegu duotas $2n-$ kampis. Fiksuokime šio daugiakampio viršūnę, tarkime A_1 ir sujunkime su kita viršūne, tarkime A_i. Atkarpa jungianti šias dvi viršūnes dalija daugiakampį į dvi dalis (du viršūnių poaibius). Jei vienoje dalyje yra $2s$ viršūnių, tai kitoje dalyje- $2(n-s-1)$ viršūnė. Tokiu būdu daugiakampis yra padalijamas į $2s-$ kampį ir $2(n-s-1)-$ kampį. $2s-$ kampyje galima nubrėžti $F(s)$ galimybių nesikertančias atkarpas, o kitame daugiakampyje -$F(n-s-1)$ galimybių. Naudodami junginių daugybos taisyklę gauname, kad visas galimybių skaičius fiksuotam s yra lygus $F(s)F(n-s-1)$, visiems $0 \leq s \leq n-1$. Naudodami junginių sudėties taisyklę gauname, kad bendras galimybių skaičius yra lygus

$$F(n) = F(0)F(n-1) + F(1)F(n-2) + \ldots + F(n-1)F(0).$$

Bet tai tas pat sąryšis kurį tenkina skaičiai B_n. Pastebėję, kad $B_0 = F(0) = 1$ bei $B_1 = F(1) = 1$ gauname, kad

$$F(n) = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

Tarkime duota skaičių aibė $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Keliais būdais galima sudauginti n skaičių, surašytų nurodyta tvarka*? Remiantis skaičių sandaugos asociatyvumo dėsniu, visų šių skaičių sandaugą, nekeičiant dauginamųjų, galime užrašyti įvairias būdais, (nepamirškime, kad dauginame tik po du elementus). Pavyzdžiui, keturių elementų sandaugą galime gauti atlikdami veiksmus vienu iš nurodytų būdų:

$$(ab)(cd) = (a(bc))d) = ((ab)c)d = a(b(cd)) = (a((bc)d).$$

Tačiau šis uždavinys jau buvo nagrinėtas, t.y. šis skaičius lygus n elementės aibės skaidymo procesų klasių skaičiui. Šis skaičius yra jau žinomas ir jis lygus $B_{n-1} = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = K_n$. Šis skaičius yra vadinamas *Katalano skaičiumi*.

Uždaviniai

1. Reikia išnešioti 6 laiškus. Kelias būdais tai galima padaryti, jeigu laiškams išnešioti yra 3 kurjeriai ir kiekvieną laišką galima patikėti bet kuriam iš jų.

2. Susirinkime turi kalbėti 5 pranešėjai, tarkime A, B, C, D, E. Kelias būdais galima tai padaryti, kad B nekalbėtų anksčiau už A?

3. Kelias būdais galima susodinti 5 vyrus ir penkias moteris apie stalą, kad vienos lyties atstovas nesėdėtų greta? $2 \cdot (5!)^2$

4. Traukinio vagono kupe yra du priešpriešiniai suolai, kuriose yra po penkias vietas. Žinoma, kad keturi keleiviai nori sėdėti veidu į garvežį, trys - nugara į garvežį, o likusiems trims nesvarbu kaip sėdėti. Keliais būdais galima parduoti bilietus į vietas taip, kad visi būtų patenkinti.

5. Mama turi 2 obuolius ir 3 kriaušes. Kasdien duoda po vieną vaisių. Kelias būdais galima išdalyti šiuos vaisius?

6. Analogiškas uždavinys, kai yra m obuolių ir n kriaušių?

7. Tėvas turi penkis apelsinus, kuriuos gali išdalyti aštuoniems vaikams. Kiekvienam duoda apelsiną arba ne. Kelias būdais gali išdalyti šiuos apelsinus?

8. Pašto skyriuje parduodama 10 rūšių atviručių. Keliais būdais galima nusipirkti 12 atviručių, jei renkamės atsitiktinai? Keliais būdais galima nusipirkti 8 atvirutes? Keliais būdais galima nusipirkti 8 skirtingas atvirutes, jei jūs paprašote pardavėjos tai padaryti?

9. Iš 7 vyrų ir 4 moterų reikia sudaryti 6 asmenų grupę, kurioje būtų bent dvi moterys. Keliais būdais tai galima padaryti.

10. Traukinys, kuriame važiuoja 100 keleivių, sustoja 20 kartų. Keliais būdais gali išlipti keleiviai? Tas pat uždavinys, tik dabar atsižvelgiame į tai, kiek keleivių išlipa stotyje (nesvarbu kokie).

11. Knygų lentynoje yra 20 knygų. Keliais būdais galima pasirinkti 6 knygas, kad nepaimtume dviejų knygų esančių greta.

12. Knygų lentynoje yra 15 juodais ir 10 rudais viršeliais knygų. Kelias būdais galima sustatyti lentynoje knygas taip, kad juodosios knygos stovėtų viena šalia kitos eilės pradžioje? Kiek bus išdėstymų, jei pareikalausime, kad juodosios knygos būtų viena šalia kitos, bet kokioje vietoje?

13. Keliais būdais iš 15 asmenų galima sudaryti darbo grupę? Laikome, kad darbo grupę gali sudaryti bet koks asmenų skaičius.

14. Sakykime, kad $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$, yra skaičiaus m kanoninis skaidinys. Kiek daliklių turi šis skaičius?

15. Kiek skaičių, mažesnių už milijoną, galima sudaryti iš skaičių a) $9, 8$; b) $9, 8, 0$. $a)2 + 2^2 + \dots + 2^6$; $b)2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^5)$.

16. Kiek žodžių galima sudaryti iš 9 priebalsių ir 7 balsių, jei kiekviename žodyje turi būti 4 skirtingos priebalsės ir 3 skirtingos balsės? Kiek šitaip sudarytų žodžių neturi dviejų greta stovinčių priebalsių?

17. Iškyloje dalyvauja 92 žmonės. Sumuštinių su dešra pasiėmė 47 žmonės, su sūriu 38 žmonės, su kumpiu 42 žmonės, su dešra ir sūriu 28 žmonės, su dešra ir kumpiu 31 žmogus, su sūriu ir kumpiu 26 žmonės. Visų trijų rūšių sumuštinių pasiėmė 25 žmonės. Keletas žmonių pasiėmė tik po vyno butelį. Kiek žmonių paėmė vyną?

18. Sudaromi visi neneigiami skaičiai mažesni už milijoną. Kiek skaičių bus parašyta naudojant tik šiuos skaitmenis?

19. 30 žmonių balsuoja už 5 pasiūlymus. Kiekvienas asmuo gali balsuoti tik už vieną pasiūlymą, be to atsižvelgiama tik į tai, kiek balsų gauna pasiūlymas. Keliais būdais gali pasiskirstyti balsai?

20. Apie apvalų stalą susodinama 20 asmenų. Keliais būdais iš šių asmenų galima parinkti 8 asmenis taip, kad į pasirintų tarpą nepatektų nė viena kaimynų pora?

21. 10 kareivių grupė buvo sustatyta į koloną. Keliais būdais būtų galime perstatyti šią koloną, kad prieš kiekvieną asmenį būtų vis kitoks asmuo, negu buvo iš pradžių?

22. Kelias būdas galima surikiuoti 20 skirtingo ūgio asmenų į dvi gretas po 10 asmenų taip, kad kiekvienoje gretoje jie stovėtų pagal ūgį, be to, kiekvienas pirmosios eilės asmuo būtų didesnis už asmenį stovintį prieš jį antroje eilėje?

23. 6 asmenys dalijasi 48 paveikslus po lygiai. Kiek yra tokių pasidalijimų?

24. Kiek skirtingų daliklių turi skaičius 4826?

25. Keturi asmenys dalijasi 20 vienodų objektų. Kelias būdais tai jie gali atlikti.

26. Kelias būdais keturi asmenys gali pasidalyti 10 obuolių 12 kriaušių ir 7 apelsinus?

27. Yra 10 skirtingų objektų ir 7 skirtingas dėžės. Keliais būdais galima išdėstyti šiuos objektus po 7 dėžes? (Laikome, kad tuščių dėžių neturi būti).