VIII. INTEGRALAI

8.1 Apibrėžtinio integralo apibrėžimas

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$.

Padalinkime intervalą $[a, b]$, n taškais, kurie tenkina sąryšius:

$$a = x_0 < x_1 < \dots x_{n-1} < x_n = b.$$

Šią taškų aibę vadinsime intervalo $[a, b]$ *skaidiniu*. Kitaip tariant, jei duotas intervalo $[a, b]$ skaidinys, tai apibrėžiamas ir intervalo suskaidymas į poaibius, kurių sąjunga yra lygi visam intervalui. Atkreipsime dėmesį į tai, kad intervalų ilgiai nebūtinai vienodi.

Pažymėkime

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

Be to, $I_j = [x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, n-1$, ir $I_n = [x_{n-1}, x_n]$.

Tarkime, kad funkcija yra tolydi. Tegu M_j, m_j yra funkcijos $y = f(x)$ didžiausia ir mažiausia reikšmės intervaluose I_j, $j = 1, \dots, n$, $m_j = \min_{x \in I_j} f(x)$, $M_j = \max_{x \in I_j} f(x)$.

Sudarykime sumas

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

ir

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Šias sumas vadinsime funkcijos $y = f(x)$ *viršutine* ir *apatine* integralinėmis sumomis, atitinkamai.

Akivaizdu, kad $m_i \le M_i$, $i = 1, \dots, n$. Bet tada ir $s_n \le S_n$. Pastebėkime, kad $m \le m_i$, ir $M_i \le M$, $i = 1, \dots, n$. Tada

$$s_n \ge m\Delta x_1 + m\Delta x_2 + \dots + m\Delta x_n = m(b-a)$$

ir

$$S_n \le M\Delta x_1 + M\Delta x_2 + \dots + M\Delta x_n = M(b-a).$$

Iš paskutiniųjų dviejų nelygybių išplaukia nelygybė:

$$m(b-a) \le s_n \le S_n \le M(b-a).$$

Tarkime, kad taškai $\xi_i \in I_i$, $i = 1, \dots, n$. Sudarykime sumą

$$\Sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1}$$

(1) suma yra vadinama funkcijos $y = f(x)$ *i*ntegraline suma, intervale $[a, b]$. Pastebėsime, kad teisingos nelygybės:

$$m_i \Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i \Delta x_i.$$

Iš paskutiniųjų nelygybių išplaukia, kad

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

arba

$$s_n \le \Sigma_n \le S_n. \tag{2}$$

Nesunku suprasti, kad integralinė suma I_n priklauso nuo intervalo skaidinio ir taškų $\xi_i, i = 1, \ldots, n$ parinkimo. Patį didžiausią skaidinio intervalą pažymėkime simboliu Δ. T.y. $\Delta = \Delta(n) = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta_i$.

Aišku, kad bet kokiam intervalo skaidiniui ir laisvai pasirinktiems taškams $\xi_i \in I_i$ mes galime sudaryti integralinę sumą

$$\Sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Tarkime, kad mes nagrinėjame kokią nors intervalo $[a, b]$ skaidinių seką, kurios $\Delta \to 0$, kai $n \to \infty$. Beje, kaip ir anksčiau $\xi_i \in I_i$. Tarkime, kad taip sudarytai skaidinių sekai, ją atitinkanti integralinių sumų seka turi ribą, t.y.

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S.$$

Jeigu šios sekos riba egzistuoja ir nepriklauso nei nuo intervalo $[a, b]$ skaidinių sudarymo (skaidinio taškų parinkimo), nei taškų $\xi_i \in I_i$ parinkimo, tai šią ribą vadinsime funkcijos $y = f(x)$ apibrėžtiniu integralu, intervale $[a, b]$ ir žymėsime simboliu

$$\int\limits_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

Taigi

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x. \tag{3}$$

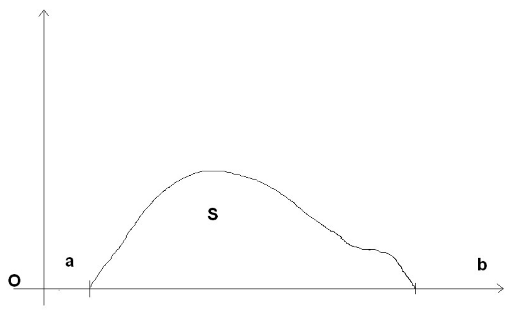
Vadinasi apibrėžtinis integralas, intervale $[a, b]$, yra sumos apibendrinimas. Jeigu funkcijai $y = f(x)$ teisinga (3) lygybė, tai funkcija bus vadinama integruojama intervale $[a, b]$.

Pavyzdys Iš integralo apibrėžimo išplaukia akivaizdi integralo geometrinė interpretacija. Funkcijos $f(x) = y$ integralas, intervale $[a, b]$ yra plotas srities, kurią riboja Ox ašis ir nagrinėjamos funkcijos grafikas. Beje, atkreipsime dėmesį, kad šiuo atveju plotas gali įgyti ir neigiamą skaitinę reikšmę!

Panagrinėkime du atvejus.

a) Tarkime, kad funkcija įgyja tik teigiamas reikšmes intervale $[a, b]$. Tada šios funkcijos integralas intervale $[a, b]$ sutampa su plotu srities, kurią riboja funkcijos grafikas ir Ox ašis 1 pav.

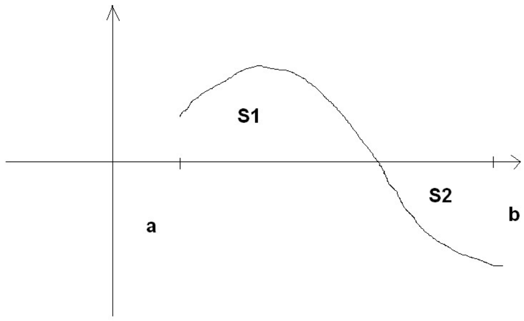
$$\int\limits_a^b f(x) \mathrm{d}x = S.$$



1 pav.

b) Jei funkcija integruojamame intervale įgyja skirtingų ženklų reikšmes, tai šiuo atveju integralo reikšmė sutampa su plotų, skirtingus ženklus įgyjančiose dalyse skirtumu, 2 pav.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S1 - S2.$$



2 pav.

Žinome, kad jei riba egzistuoja, tai ir bet kokio posekio riba yra ta pati. Remdamiesi šia ribos savybe gauname, kad

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

ir

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} M \Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Pasirodo, kad

Teorema 1. *Jeigu funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$, tai tada šiame intervale funkcija yra integruojama.*

Pastaba Tarkime, kad duotas integralas

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Susitarkime žymėti

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Be to laikysime, kad

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Pastaba Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei funkcija turi trūkio taškus intervale, kuriame skaičiuojame integralą, tai šiuo atveju integralas skaičiuojamas truputį kitaip. Šią situaciją nagrinėsime kiek vėliau.

8.2 Apibrėžtinio integralo savybės

1. Savybė

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Šios savybės įrodymas išplaukia iš ribų savybių (konstantą galima iškelti prieš ribos ženklą).

2. Savybė

$\ominus$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Remdamiesi ribų savybėmis gauname, kad

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n \big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\Delta x_i =$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$\oplus$

3. Savybė Tarkime, kad visiems $x \in [a,b], \quad f(x) \le \varphi(x)$. Tada

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

$\ominus$

Nagrinėsime skirtumą:

$$\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \big(\varphi(x)-f(x)\big)\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n \big(\varphi(\xi_i)-f(\xi)_i)\big)\Delta x_i. \tag{5}$$

Pastebėsime, kad skirtumai $\varphi(\xi_i)-f(\xi_i) \ge 0$ ir be to $\Delta x_i \ge 0, \quad i = 1\ldots,n$. Tada ir (5) riba turi šią savybę, t.y.

$$0 \le \int_a^b \big(\varphi(x)-f(x)\big) = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Iš paskutiniųjų nelygybių išplaukia teoremos įrodymas.

$\oplus$

4. Savybė Tarkime, kad $y = f(x)$ yra tolydi funkcija intervale $[a,b]$. Tada

$$m(a-b) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a),$$

m, M yra funkcijos mažiausia ir didžiausia reikšmės, intervale $[a, b]$.

$\ominus$

Turime, kad $m \le f(x) \le M,$ visiems $x \in [a, b]$. Remdamiesi 3. savybe gauname, kad

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b M\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Bet $\int_a^b m\mathrm{d}x = m(b-a)$ ir $\int_a^b M\mathrm{d}x = M(b-a)$. Įrašę paskutiniasias lygybes į (6) nelygybę gauname teoremos įrodymą.

$\oplus$

5. Savybė Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$. Tada egzistuoja taškas $\xi \in [a, b]$, toks, kad

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$

$\ominus$

Kaip paprastai tarkime, kad m ir M yra funkcijos mažiausia ir didžiausia reikšmės intervale $[a, b]$. Remdamiesi 4. savybe gauname, kad

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M.$$

Pažymėkime

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu, \quad m \le \mu \le M.$$

Funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$, taigi, ši funkcija įgyja visas reikšmes iš intervalo $[m, M]$. Vadinasi, egzistuoja $\xi \in [a, b]$ toks, kad $f(\xi) = \mu$. Taigi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

$\oplus$

Pavyzdys Funkcijos $y = f(x)$ vidurkiu $\overline{f}$, intervale $[a, b]$, vadinsime tokį skaičių:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \overline{f}.$$

5. Savybė Tarkime, kad $a \le c \le b$. Tada teisinga lygybė:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x,$$

jeigu pastarieji integralai egzistuoja.

$\ominus$

Pastebėsime, kad 6. savybės formuluotėje nebūtina reikalauti, kad būtų teisingi sąryšiai $a < c < b$, t.y. galime šią savybę formuluoti bet kokiems trims taškams a, b, c. Tikimės, kad skaitytojas pats tuo įsitikins.

Remdamiesi pateiktu intergralo apibrėžimu apskaičiuokime integralą:

$$\int\limits_0^3 (x-5)\mathrm{d}x.$$

Suskaidome intervalą $[0,3]$ n vienodo ilgio $\Delta x = \frac{3}{n}$, intervalais. Šių intervalų galiniai taškai $0, \frac{3}{n}, 2\cdot\frac{3}{n}, 3\cdot\frac{3}{n}, \ldots, (n-1)\cdot\frac{3}{n}, 3$. Matome, kad minėtame intervale funkcija įgyja neigiamas reikšmes. Sudarome integralinę sumą:

$$S_n = \frac{3}{n} f\Big(\frac{3}{n}\Big) + \frac{3}{n} f\Big(2\cdot\frac{3}{n}\Big) + \cdots + \frac{3}{n} f\Big(n\cdot\frac{3}{n}\Big).$$

Kadangi funkcija yra neigiama, tai gausime neigiamą šio integralo reikšmę. Užrašę integralinę sumą funkciją išreikštine forma, t.y $f(u) = u - 5$ gauname

$$S_n = \frac{3}{n}\Big((\frac{3}{n} - 5) + \big(2\cdot\frac{3}{n} - 5\big) + \cdots + \big(n\cdot\frac{3}{n} - 5\big)\Big) =$$

$$\frac{3}{n}\Big(-5n + \frac{3}{n}(1+2+\cdots+n)\Big) = \frac{3}{n}\Big(-5n + \frac{3}{n}\frac{n(1+n)}{2}\Big) = -15 + \frac{9}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

Vadinasi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = -10,5.$$

Pastarasis skaičius yra integralo reikšmė.

Matome, kad netgi labai paprastos funkcijos apibrėžtinis integralas, remiantis apibrėžimu, skaičiuojamas gana sudėtingai. Nesunku suprasti, kad norint suskaičiuoti sudėtingesnės funkcijos apibrėžtinį integralą, remiantis apibrėžimu, tektų gerokai pavargti, o dažnai skaičiavimas būtų labai sudėtingas. Kitame skyrelyje aptarsime metodą, kuriuo remdamiesi skaičiuosime apibrėžtinį integralą naudodamiesi ne ribos sąvoka, bet išvestine.

8.3 Pirmykštė funkcija. Niutono Leibnico formulė

Apibrėžimas *Funkciją $F(x)$ vadinsime funkcijos $f(x)$ pirmykšte funkcija, jeigu teisinga lygybė*

$$F'(x) = f(x).$$

Tarkime žinome funkcijos $f(x)$ kokią nors pirmykštę funkciją $F(x)$. Tada funkcija $F(x) + 1$ taip pat yra pirmykštė funkcija funkcijai $f(x)$. Dar daugiau, jei prie pirmykštės funkcijos pridėsime bet kokią konstantą, tai gautoji funkcija $F(x) + c$ irgi bus pirmykštė funkcijai $f(x)$, kadangi $F'(x) + c' = f(x)$.

Teisinga tokia

Teorema 2. *Jeigu $F_1(x)$ ir $F_2(x)$ yra dvi funkcijos $f(x)$ pirmykštės funkcijos intervale (a,b), tai šios funkcijos skiriasi konstanta, t.y.*

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

$\ominus$

Remdamiesi pirmykštės funkcijos apibrėžimu gauname, kad esant teoremos prielaidoms teisingos lygybės:

$$\begin{cases} F_1'(x) = f(x), \\ F_2'(x) = f(x), \end{cases} \qquad x \in [a,b]. \tag{7}$$

Pažymėję $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, iš (7) lygybės gauname, kad

$$\varphi'(x) = \big(F_1(x) - F_2(x)\big) \equiv 0, \quad x \in [a, b].$$

Remdamiesi funkcijos pastovumo požymiu gauname, kad paskutinysis skirtumas yra lygus konstantai, visiems $x \in [a, b]$.

$\oplus$

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad jei žinoma kokia nors funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija $F(x)$, tai bet kokia kita funkcijos $F(x)$ pirmykštė funkcija $G(x) = F(x) + c$, čia c yra konstanta.

Nagrinėsime integralą

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b]. \tag{8}$$

Kitaip tariant, nagrinėjamas integralas yra kintamo ploto (arba kintamų plotų skirtumo priklausomai nuo funkcijos ženklo) funkcija. Kadangi funkcija $y = f(x)$ yra tolydi, tai ir funkcija $\Phi(x)$ taip pat yra tolydi (įrodykite). Teisinga tokia teorema

Teorema 3. *Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$. Tada* (8) *lygybe apibrėžtos funkcijos $\Phi(x)$ išvestinė yra lygi funkcijai $f(x)$.*

$\ominus$

Suskaičiuokime funkcijos $\Phi(x)$ išvestinę. Turime, kad

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}. \tag{9}$$

Pasinaudoję 5. savybe gauname, kad egzistuoja taškas μ toks, kad teisinga lygybė;

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = f(\mu)\Delta x, \quad \mu \in [x, x + \Delta x].$$

Pastebėsime, kad jei $\Delta x \to 0$, tai $\mu \to x$. Kadangi funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$, tai

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\mu) = \lim_{\mu\to x} f(\mu) = f(x).$$

Remdamiesi paskutiniaisias sąryšiais, iš (9) gauname

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\mu)\Delta x}{\Delta x} = f(x).$$

$\oplus$

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad funkcija $\Phi(x)$ yra viena iš funkcijos $f(x)$ pirmykščių funkcijų. Kadangi funkcijos $f(x)$ visos pirmykštės tesiskiria konstanta, tai tada pažymėję funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, gauname $F(x) = \Phi(x) + c$.

Teorema 4. *Teorema (Niutono-Leibnico formulė) Tarkime, kad $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, beje, $f(x)$ yra tolydi apibrėžimo srityje. Tada*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

$\ominus$

Tarkime, kad funkcija $y = F(x)$ yra kokia nors funkcijos $y = f(x)$ pirmykštė funkcija. Žinome (2 Teorema), kad funkcija $\Phi(x)$ taip pat yra funkcijos $y = f(x)$ pirmykštė funkcija. Kadangi dvi pirmykštės funkcijos tesiskiria konstanta, tai teisinga lygybė:

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + c.$$

Tarkime, kad $x = a$. Tada gauname, kad $\Phi(a) + c = 0$ arba $c = -\Phi(a)$. Taigi

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Parinkę $x = b$ gauname,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

$\oplus$

Toliau žymėsime:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b.$$

Niutono-Leibnico formulė sudaro galimybes apskaičiuoti apibrėžtinį integralą, žinant duotosios funkcijos bet kokią pirmykštę funkciją.

8.4 Neapibrėžtinis integralas

Praeitame skyrelyje, nagrinėdami apibrėžtinį integralą pastebėjome, kad pastarąjį galima skaičiuoti naudojant pirmines funkcijas. Tai labai supaprastina apibrėžtinio integralo skaičiavimą. Tiksliau kalbant,

$$\int\limits_{x_1}^{x} f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(x_1) = F(x) + C,$$

čia $C = -F(x_1)$ yra fiksuotas skaičius, o $x-$ kintamas dydis. Taigi, funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, yra šios funkcijos apibrėžtinis integralas su kintamu viršutiniu rėžiu. Tad gana natūralu, funkcijos $f(x)$ bet kokios pirmykštės funkcijos žymėjimui naudoti integralo simboliką, nenurodant rėžių.

Tegu $c \in \mathbb{R}$ yra konstanta.

Apibrėžimas *T*arkime, kad $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija. Reiškinį $F(x)+c$ vadinsime funkcijos $f(x)$ neapibrėžtiniu integralu ir žymėsime simboliu

$$\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Remdamiesi apibrėžimu galime rašyti:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad \text{jeigu} \quad F'(x) = f(x).$$

Kitaip tariant, funkcijos $f(x)$ neapibrėžtinis integralas yra šios funkcijos pirmykščių funkcijų aibė.

Funkciją $f(x)$ vadinsime pointegrine funkcija, $f(x)\mathrm{d}x-$ pointegriniu reiškiniu, o simbolį $\int -$ integralo simboliu.

Ar bet kokia funkcija turi pirmykštę funkciją? Teisinga tokia teorema:

Pastaba Jeigu funkcija $y = f(x)$ yra tolydi intervale $[a, b]$, tai egzistuoja šios funkcijos neapibrėžtinis integralas.

Ši pastaba yra Teoremos 3 tiesioginė išvada.

Aptarsime metodus, kurių dėka galėsime rasti kai kurių elementariųjų funkcijų neapibrėžtinius integralus. Procesą, kurio metu rasime funkcijos neapibrėžtinį integralą, vadinsime *i*ntegravimu. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad elementariųjų funkcijų išvestinės yra elementariosios funkcijos, tačiau elementariųjų funkcijų integralai, nebūtinai elementariosios funkcijos. Plačiau apie tai kiek vėliau.

1) Neapibrėžtinio integralo išvestinė yra lygi pointegrinei funkcijai, t.y.

$$\Big(\int f(x)\mathrm{d}x\Big)' = \big(F(x)+c\big)' = f(x).$$

Pastaroji savybė yra tiesioginė apibrėžimo išvada.

2) Neapibrėžtinio integralo diferencialas yra lygus pointegriniam reiškiniui:

$$\mathrm{d}\Big(\int f(x)\mathrm{d}x\Big) = f(x)\mathrm{d}x.$$

Pastaroji savybė išplaukia iš 1) savybės.

3) Bet kokios funkcijos diferencialo neapibrėžtinis integralas yra lygus tos pačios funkcijos ir bet kokios konstantos sumai, t.y.

$$\int \mathrm{d}g(x) = g(x)+c.$$

Perrašę paskutiniąją lygybę

$$\int g'(x)\mathrm{d}x = g(x)+c \tag{10}$$

ir skaičiuodami abiejų pusių išvestines (taikydami 1) savybę) gauname lygybę

$$g'(x) = g'(x).$$

Taigi, (10) lygybės kairėje ir dešinėje pusėje yra reiškiniai, besiskiriantys tik, gal būt, konstanta.

4) Dviejų funkcijų sumos integralas yra lygus šių funkcijų integralų sumai, t.y.

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x.$$

Siūlome šią savybę įrodyti skaitytojui.

5) Pastovų daugiklį, esantį po integalo simboliu, galima iškelti prieš integralo simbolį, t.y.

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x.$$

Šios savybės įrodymą taip pat paliekame skaitytojui. Siūlome suskaičiuoti abiejose lygybės pusėse esančių reiškinių išvestines ir jas palyginti.

8.5 Elementariųjų funkcijų integralų lentelė. Integravimo metodai

Pateiksime elementariųjų funkcijų integralų lentelę.

$$1. \int 0\mathrm{d}x = c;$$

$$2. \int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c, \quad \alpha \neq -1;$$

$$3. \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+c;$$

$$4. \int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c;$$

$$5. \int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c;$$

$$6. \int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \mathrm{tg} x + c;$$

$$7. \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\mathrm{ctg} x + c;$$

$$8. \int \mathrm{tg} x \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c;$$

$$9. \int \mathrm{ctg} x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c;$$

$$10. \int \mathrm{a}^x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{a}^x}{\ln \mathrm{a}} + c;$$

$$11. \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c;$$

$$12. \int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + c, \\ -\mathrm{arcctg} x + c; \end{cases}$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{arcsin} x + c, \\ -\mathrm{arccos} x + c; \end{cases}$$

$$14. \int \frac{1}{1-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

Skaitytojui siūlome įsitikinti, nurodytų lygybių teisingumu.

Kintamųjų keitimo metodas

Tarkime, kad mums reikia suskaičiuoti integralą

$$\int f(x)\mathrm{d}x,$$

tuo tarpu iš karto nustatyti funkcijos $y = f(x)$ pirmykštės negalime, nors ir žinome, kad pastaroji egzistuoja. Tarkime, kad laisvasis kintamasis $x = \varphi(t)$, čia $\varphi(t)$ yra diferencijuojama ir monotoninė funkcija, $t \in [\alpha, \beta]$. Aišku, kad $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$. Parodysime, kad šiuo atveju teisinga lygybė

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Paskutiniąją lygybę įrodysime, jeigu parodysime, kad abiejose lygybės pusėse esančių reiškinių išvestinės, x atžvilgiu, sutampa.

Randame (11) lygybės kairiosios funkcijos išvestinę. Remdamiesi (11) savybe gauname, kad

$$\Big(\int f(x)\mathrm{d}x\Big)'_x = f(x).$$

Panagrinėkime (11) reiškinio dešiniąją pusę. Turime, kad $x = \varphi(t)$ ir $t = \varphi^{-1}(x)$. Tada turime, kad

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Remdamiesi paskutiniąja pastaba gauname, kad

$$\Big(\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t\Big)'_x = \Big(\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t\Big)'_t \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} =$$

$$f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f\big(\varphi(t)\big) = f(x).$$

Matome, kad (11) reiškinio, abiejų lygybės pusių išvestinės sutampa. Vadinasi ir (11) lygybės abu neapibrėžtiniai integralai sutampa.

Pastebėsime, kad integruodami, paprastai, atliekame keitinį $t = g(x)$. Tada, perskaičiavę visą pointegrinį reiškinį, naujojo kintamojo atžvilgiu, gauname integralą, kurio laisvasis kintamasis t. T.y. pakeitę kintamąjį gauname (11) reiškinio dešiniąją pusę. Mes įrodėme, kad dešinioji ir kairioji pusės sutampa. Auksčiau aprašytas integravimo metodas yra vadinamas *k*intamųjų keitimo metodu.

Atkreipiame skaitytojo dėmesį, kad kintamųjų keitimo metodas yra vienas iš dažniausiai taikomų metodų, integruojant, todėl labai svarbu šį metodą suprasti iš esmės.

Tarkime, kad žinome kokios nors funkcijos pirmykštę funkciją. T.y.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Tada pastebėję, kad $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}(ax)$, gauname

$$1)\ \ I = \int f(ax)\mathrm{d}x = \int f(ax)\frac{\mathrm{d}(ax)}{a} = \frac{1}{a}\int f(ax)\mathrm{d}(ax).$$

Pažymėję $t = ax$ gauname, kad

$$I = \frac{1}{a}\int f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}F(t) + c = \frac{1}{a}F(ax) + c.$$

Pavyzdys

$$\int \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}4x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} + c.$$

2) Remdamiesi diferencialo apibrėžimu gauname $\mathrm{d}(a+x) = \mathrm{d}x$.
Tada

$$I = \int f(a+x)\mathrm{d}x = \int f(a+x)\mathrm{d}(a+x).$$

Pažymėję $t = a + x$ gauname, kad

$$I = \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + c = F(a+x) + c.$$

Pavyzdys

$$\int \sin(5x+2)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \sin(5x+2)\mathrm{d}(5x+2) = -\frac{1}{5}\cos(5x+2) + c.$$

3) Apibendrindami galime tvirtinti, kad jei (11) lygybė yra teisinga, tai

$$\int f(g(x))\mathrm{d}(g(x)) = F(g(x)) + c.$$

Remdamiesi 1), 2), 3) pastabomis, galime perrašyti apibendrintą integralų lentelę, t.y.

$$1.\int f^{\alpha}(x)\mathrm{d}f(x) = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c,\ \ \alpha \neq -1;$$

$$2. \int \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}f(x) = \ln|f(x)| + c;$$

$$3. \int \sin f(x) \mathrm{d}f(x) = -\cos f(x) + c;$$

$$4. \int \cos f(x) \mathrm{d}f(x) = \sin f(x) + c;$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 f(x)} \mathrm{d}f(x) = \mathrm{tg} f(x) + c;$$

$$6. \int \frac{1}{\sin^2 f(x)} \mathrm{d}f(x) = -\mathrm{ctg} f(x) + c;$$

$$7. \int \mathrm{tg} f(x) \mathrm{d}f(x) = -\ln|\cos f(x)| + c;$$

$$8. \int \mathrm{ctg} f(x) \mathrm{d}f(x) = \ln|\sin f(x)| + c;$$

$$9. \int \mathrm{a}^{f(x)} \mathrm{d}f(x) = \frac{\mathrm{a}^{f(x)}}{\ln \mathrm{a}} + c;$$

$$10. \int \mathrm{e}^{f(x)} \mathrm{d}f(x) = \mathrm{e}^{f(x)} + c;$$

$$11. \int \frac{1}{1+f(x)^2} \mathrm{d}f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg} f(x) + c, \\ -\mathrm{arcctg} f(x) + c; \end{cases}$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}} \mathrm{d}f(x) = \begin{cases} \arcsin f(x) + c, \\ -\arccos f(x) + c; \end{cases}$$

$$13. \int \frac{1}{1-f(x)^2} \mathrm{d}f(x) = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right| + c;$$

Suskaičiuokime keletą integralų remiantis kintamojo keitimo teorema bei savybėmis 1)-3).

Pavyzdys

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3x} = \frac{1}{3} \int \frac{\mathrm{d}(1+3x)}{1+3x} = \ln|1+3x| + c.$$

Pavyzdys

$$\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x = \int \sin^3 x \mathrm{d} \sin x.$$

Pažymėję, $t = \sin x$ gauname, kad

$$\int \sin^3 x \mathrm{d} \sin x = \int t^3 \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c.$$

Pavyzdys Raskime integralą

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Pažymėkime $t = \mathrm{e}^x$. Kai atliekame kintamojo keitimą (pažymime), tai keisdami šį kintamąjį integrale turime pointegriniame reiškinyje visus senus kintamuosius keisti naujaisiais. Turime $x = \ln t$ ir $\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln t) = \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Tada

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}.$$

Pastebėsime, kad

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}.$$

Remdamiesi šia lygybe gauname, kad

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|t| - \ln|1+t|.$$

Gauname, kad

$$I = \ln|\frac{t}{1+t}| = \ln|\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}| + c.$$

Integravimas dalimis

Panagrinėsime dar vieną integravimo metodą, kuris vadinamas *d*alinio integravimo metodu. Tarkime, kad u, v diferencijuojamos funkcijos. Tada teisinga lygybė

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u, \text{ arba } u\mathrm{d}v = uv - v\mathrm{d}u.$$

Integruodami paskutiniąją lygybę gauname tokią lygybę

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = uv - \int vu'\mathrm{d}x.$$

Pastarąją formulę dažniausiai tenka naudoti, kai pointegrinį reiškinį galime perrašyti kokios nors funkcijos u ir kitos funkcijos diferencialu. Minėti du reiškiniai paprastai parenkami integravimo metu, priklausomai nuo pointegrinės funkcijos. Aptarsime keletą specifinių atvejų.

Tarkime, kad pointegrinė funkcija yra funkcijų x^α ir vienos iš funkcijų e^x arba $\sin x$ arba $\cos x$ sandauga. Sutarkime tokio pobūdžio integralą trumpai žymėti žemiau aprašytu būdu. Tada funkcijos u ir v parenkamos tokiu būdu,

$$\int x^\alpha \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} \\ \cos ax \\ \sin ax \end{cases} \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int x^\alpha \mathrm{d} \begin{cases} \mathrm{e}^{ax} \\ \sin ax \\ -\cos ax, \end{cases}$$

atitinkamai.

Pavyzdys Suintegruokime tokį integralą

$$I = \int x\cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\sin(2x).$$

Integruodami dalimis gauname, kad

$$I = \frac{1}{2}(x\sin(2x) - \int \sin(2x)\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}(x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)) + c.$$

Jei pointerginis reiškinys yra funkcijos x^α ir vienos iš funkcijų $f\big(\text{arcsin}x\big)$, $f\big(\text{arccos}x\big)$, $f\big(\text{arctg}x\big)$, $f\big(\text{arcctg}x\big)$ arba $f\big(\ln x\big)$ sandauga, tai funkcijos u ir v paprastai parenkamos tokiu būdu:

$$\int x^\alpha \begin{cases} f\big(\text{arcsin}x\big) \\ f\big(\text{arccos}x\big) \\ f\big(\text{arctg}x\big) \\ f\big(\text{arcctg}x\big) \\ f\big(\ln x\big) \end{cases} \mathrm{d}x = \int \begin{cases} f\big(\text{arcsin}x\big) \\ f\big(\text{arccos}x\big) \\ f\big(\text{arctg}x\big) \\ f\big(\text{arcctg}x\big) \\ f\big(\ln x\big) \end{cases} \mathrm{d}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Pavyzdys Suintegruokime:

$$I = \int x\mathrm{arctg}x\mathrm{d}x.$$

Remdamiesi aukščiau paminėta taisykle keičiame $x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$. Turime, kad

$$I = \frac{1}{2}\int \mathrm{arctg\,x d}x^2 = \frac{1}{2}(x^2\mathrm{arctg\,x} - \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x) =$$

$$\frac{1}{2}(x^2\mathrm{arctg\,x} - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}(x^2\mathrm{arctg\,x} - \int \mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}) =$$

$$\frac{1}{2}(x^2\mathrm{arctg\,x} - x + \mathrm{arctgx}) + c.$$

Jei pointegrinis reiškinys yra eksponentinės ir trigonometrinės funkcijos sandauga, tai

$$\int \mathrm{e}^{bx}\begin{cases}\cos ax \\ \sin ax\end{cases} \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{bx}\mathrm{d}\begin{cases}\sin ax \\ -\cos ax.\end{cases}$$

Pavyzdys Suintegruokime reiškinį:

$$I = \int \mathrm{e}^{2x}\sin x\mathrm{d}x = -\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}\sin x = -\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2\int \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x =$$

$$-\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}\sin x = -\mathrm{e}^{2x}\cos x + 2\mathrm{e}^{2x}\sin x - 4\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\mathrm{d}x.$$

Turime, kad

$$I = -\mathrm{e}^{2x}(\cos x + 2\sin x) - 4I, \text{ arba } 5I = -\mathrm{e}^{2x}(\cos x + 2\sin x).$$

Iš paskutiniojo sąryšio išplaukia, kad

$$\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}(\cos x + 2\sin x) + c.$$

8.6 Racionalių reiškinių integravimo metodai

Apibrėžimas *Funkciją, $Q_n(x)/R_m(x)$ vadinsime racionaliuoju reiškiniu, jeigu Q_n ir R_m yra polinomai. Racionalųjį reiškinį vadinsime taisyklingu, jeigu $n < m$. Priešingu atveju reiškinys yra netaisyklingas.*

Pavyzdys Reiškinys

$$\frac{x^3+2x+1}{3x^5+2x+1}$$

yra taisyklingas, o reiškinys

$$\frac{x^2+2x+4}{2x+3} -$$

netaisyklingas.

Tarkime, kad racionalusis reiškinys yra netaisyklingas t.y. $n > m$. Dalindami polinomą Q_n iš R_m gausime polinomo ir taisyklingo racionalaus reiškinio sumą:

$$\frac{Q_n}{R_m} = P_{n-m} + \frac{Q_l^0}{R_m}, \quad l < m.$$

Apibrėžimas *Racionalų reiškinį*

$$\frac{x^4+4x^3+5x-4}{2x+1}$$

užrašykime polinomo ir taisyklingo racionalaus reiškinio suma:

$$\begin{array}{l} x^4+4x^3+5x-4|\frac{x+2}{x^3+2x^2-4x+13} \\ \underline{x^4+2x^3} \\ \quad 2x^3+5x-4 \\ \quad \underline{2x^3+4x^2} \\ \qquad -4x^2+5x-4 \\ \qquad \underline{-4x^2-8x} \\ \qquad\qquad 13x-4 \\ \qquad\qquad \underline{13x-26} \\ \qquad\qquad\qquad 22 \end{array}$$

Gauname, kad

$$\frac{x^4+4x^3+5x-4}{2x+1} = x^3+2x^2-4x+13+\frac{22}{x+2}.$$

Apibrėžimas *Racionalius reiškinius*

$$1.\ \frac{a}{x-a},\quad 2.\ \frac{A}{(x-a)^k}(k\in\mathcal{N}, k\geq 2),\quad 3.\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

$$4.\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\quad k\in\mathcal{N}, k\geq 2.$$

vadinsime paprasčiausiais racionaliaisias reiškiniais.

Pasirodo (to nenagrinėsime, tik skaitytojui besidominčiam šia problematika pasiūlysime pvz. V. Kabailos "Matematinė analizė" vadovėlį), kad bet koks racionalusis reiškinys gali būti pertvarkytas į paprasčiausių racionaliųjų reiškinių ir polinomų sumą. Suformuluokime šį rezultatą.

Lema *Tarkime, kad Q_m/R_n yra taisyklingas racionalusis reškinys. Be to*

$$R_n(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

čia $\alpha_1+\cdots\alpha_k+2\beta_1+\cdots 2\beta_s = n$. Tada racionalųjį reiškinį Q_m/R_n galime išreikšti tokiu būdu:

$$\frac{Q_m}{R_n} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\cdots\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{(x-a_1)}+\cdots$$

. . . .

$$\frac{A_1^{(k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+\frac{A_2^{(k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k-1}}+\cdots\frac{A_k^{(k)}}{(x-a_k)}+\cdots+$$

$$\frac{M_1^1x+N_1^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_2^1x+N_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+\cdots\frac{M_{\beta_1}^1x+N_{\beta_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)}$$

. . . .

$$\frac{M_1^sx+N_1^s}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s}}+\frac{M_2^sx+N_2^s}{(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s-1}}+\frac{M_{\beta_s}^sx+N_{\beta_s}^s}{(x^2+p_sx+q_s)}.$$

Šių reiškinių koeficientus galime apskaičiuoti, lygindami kairiosios ir dešiniosios pusių koeficientus, prie atitinkamų x laipsnių. Gausime lygčių sistemas, kurias išsprendę rasime ieškomuosius koeficientus. Šis metodas vadinamas *neapibrėžtinių koeficientų metodu.*

Suintegruokime aukščiau pateiktus paprasčiausius racionaliuosius reiškinius.

1.

$$\int\frac{A}{x-a}\mathrm{d}x = A\int\frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a) = A\ln|x-a|+c.$$

2.
$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-k}\mathrm{d}(x-a) = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + c.$$

3. Tarkime, kad $p^2/4 - q < 0$. Tada

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{A/2(2x+p) + (B - Ap/2)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{A}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}(x^2+px+p) + \big(B - \frac{pA}{2}\big)\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \big(B - \frac{pA}{2}\big)\int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\mathrm{arctg}\big(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\big).$$

Nagrinėsime atvejį $p^2/4 - q > 0$. Pastaroji nelygybė reiškia, kad 3. integralo, pointegrinio reiškinio vardiklis turi dvi (arba vieną kartotinę) šaknis, tarkime x_1, x_2. Tada

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{(x-x_1)(x-x_2)}\mathrm{d}x.$$

Remdamiesi aukščiau suformuluota lema gauname, kad egzistuoja konstantos a ir b tokios, kad teisinga lygybė:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_1}.$$

Tada, remdamiesi 1. integralu gauname, kad

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = a\ln|x-x_1| + b\ln|x-x_2|.$$

Apskaičiuokime 4. integralą. Turime, kad

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}(x^2+px+q) +$$

$$\big(B - \frac{pA}{2}\big)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \frac{A}{2}I_1 + \big(B - \frac{Ap}{2}\big)I_2(k).$$

Nagrinėsime integralą I_1. Pažymėkime $t = x^2+px+q$. Tada, $\mathrm{d}t = (2x+p)\mathrm{d}x$. Skaičiuojame:

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^k} = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + c.$$

Pažymėkime: $x + \frac{p}{2} = t$. Tada $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Beto, $0 < q - \frac{p^2}{4} = m^2$. Naudodami šiuos žymėjimus, $I_2(k)$ integralą perrašome taip:

$$I_2(k) = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{((x+p/2)^2 + (q-p^2/4))^k}\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(t^2+m^2)^k}\mathrm{d}t.$$

Paskutinįjį reiškinį integruojame tokiu būdu:

$$I_2(k) = \frac{1}{m^2}\int \frac{(t^2+m^2) - t^2}{(t^2+m^2)^k}\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{m^2}\int\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\mathrm{d}t-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{(t^2+m^2)^k}\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{m^2}I_2(k-1)-\frac{1}{m^2}\int\frac{t\cdot t}{(t^2+m^2)^k}\mathrm{d}t=$$
$$\frac{1}{m^2}I_2(k-1)-\frac{1}{2(k-1)}\int t\mathrm{d}\big(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\big)=$$
$$\frac{1}{m^2}I_2(k-1)+\frac{1}{2(k-1)}\big(\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+m^2)^{k-1}}\big)=$$
$$\frac{1}{m^2}I_2(k-1)+\frac{1}{2(k-1)}\big(\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}}-I_2(k-1)\big).$$

Taigi, gavome rekurentinę formulę integralui $I_2(k)$ skaičiuoti. Suprantama, kad pratęsę šį procesą gausime, kad bet kokiam k, $I_2(k)$ galėsime išreikšti per $I_2(1)$, o pastarąjį mokame skaičiuoti. Tuo ir baigiame 4. integralo nagrinėjimą.

Pateiksime keletą pavyzdžių, kaip yra taikomas neapibrėžtinių koeficientų metodas.

Pavyzdys Suintegruokime

$$I=\int\frac{2x^4-3x^3-4x^2-17x-6}{x^3-2x^2-3x}\mathrm{d}x.$$

Pastebėkime, kad pointegrinis reiškinys yra netaisyklingas. Padalinę skaitiklį iš vardiklio gauname, kad

$$\frac{2x^4-3x^3-4x^2-17x-6}{x^3-2x^2-3x}=2x+1+\frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}.$$

Tada

$$\int\frac{2x^4-3x^3-4x^2-17x-6}{x^3-2x^2-3x}\mathrm{d}x=\int 2x+1+\frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}=$$
$$x^2+x+\int\frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}\mathrm{d}x=:$$
$$x^2+x+I1.$$

Pastebėję, kad $x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)=x(x+1)(x-3)$ gauname,

$$I1=\int\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)}\mathrm{d}x.$$

Remdamiesi aukščiau pateiktais samprotavimais pointegrinį reiškinį perrašome tokiu būdu:

$$\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}.$$

Subendravardiklinę dešiniąją pusę bei sugrupavę narius prie kintamojo x laipnių gauname,kad

$$\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)}=\frac{A(x-3)(x+1)+Bx(x-3)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-3)}=$$
$$\frac{(A+B+C)x^2+(-2A-3B+C)x-3A}{x(x+1)(x-3)}.$$

Turime du racionalius reiškinius, kurių vardikliai vienodi. Tada šie racionalūs reiškiniai bus vienodi, jei skaitikliai sutaps. Kitaip tariant, lyginame koeficientus prie atitinkamų x laipsnių. Gauname, kad:

$$\begin{cases}4=A+B+C,\\-14=-2A-3B+C,\\-6=-3A.\end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą nustatome, kad $A = 2,\ B = 3,\ C = -1$. Taigi,

$$I1 = \int (\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} + \frac{-1}{x-3})\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x-3})\mathrm{d}x.$$

Suintegravę gauname, kad

$$I1 = 2\ln|x| + 3\ln|x+1| - \ln|x-3| + c.$$

Tada

$$I = x^2 + x + \ln|\frac{x^2(x+1)^3}{x-3}|.$$

Pavyzdys Suintegruokime naudodami neapibrėžtinių koeficientų metodą:

$$I = \int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Ieškome koeficientų, kurių dėka pointegrinį reiškinį būtų galima užrašyti trupmenų suma:

$$\frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Subendravardiklinę dešinę pusę ir sugrupavę koeficientus gauname, kad tam, kad du racionalūs reiškiniai būtų lygūs, turi sutapti skaitikliai:

$$6x^2 + 13x + 6 = (A+B)x^2 + (2A + 3B + C)x + A + 2B + 2C.$$

Lygindami koeficientus prie atitinkamų x laipsnių gauname, kad:

$$\begin{cases} 6 = A + B, \\ 13 = 2A + 3B + C, \\ 6 = A + 2B + 2C. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą gauname, kad $A = 4,\ B = 2,\ C = -1$. Taigi

$$\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{4}{x+2}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x.$$

Arba

$$\int \frac{6x^2 + 13x + 6}{(x+2)(x+1)^2}\mathrm{d}x = \ln((x+2)^4(x+1)^2) + \frac{1}{x+1} + c.$$

Pavyzdys Suintegruokime

$$I = \int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x.$$

Matome, kad racionalus reiškinys yra netaisyklingas. Padalinę skaitiklį iš vardiklio gauname, kad

$$\frac{x^5}{(x^2+4)^2} = x - \frac{8x^3 + 16x}{(x^2+4)^2}.$$

Tada,

$$I = \frac{x^2}{2} - \int \frac{16x + 8x^3}{(x^2+4)^2}\mathrm{d}x =: \frac{x^2}{2} + I1.$$

Užrašykime integralo $I1$ pointerginį reiškinį dviejų racionalių reiškinių suma:

$$\frac{16x - 8x^3}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+4)} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}.$$

Subendarvardiklinę dešinę pusę ir sulyginę skaitiklius gauname, kad

$$8x^3 + 0x^2 + 16x + 0 = Ax^3 + Bx^2 + (4A+C)x + 4B + D.$$

Iš pastarosios lygybės išplaukia, kad skaitikliai bus lygūs, jei koeficientai prie vienodų x laipsnių sutampa. Gauname

$$\begin{cases} 8 = A, \\ 0 = B, \\ 16 = 4A + C, \\ 0 = 4B + D. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą nustatome, kad $A = 8,\ B = 0,\ C = -16,\ D = 0$. Tada

$$I1 = \int \frac{-8x}{(x^2+4)} \mathrm{d}x + \int \frac{16x}{(x^2+4)^2 \mathrm{d}x} = -4 \int \frac{\mathrm{d}(x^2+4)}{x^2+4} + 8 \int \frac{\mathrm{d}(x^2+4)}{(x^2+4)^2}$$

arba

$$I1 = -4\ln(x^2+4) - \frac{8}{x^2+4}.$$

Tada

$$I = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x^2+4) - \frac{8}{x^2+4} + c.$$

8.7 Paprastesnių iracionaliųjų reiškinių integravimas

Panagrinėkime vieną iš paprasčiausių iracionaliųjų integralų, būtent

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}^{\,k}} \mathrm{d}x.$$

Tarkime, kad $p^2/4 - q > 0$. T.y. po šaknies ženklu esantis kvadratinis trinaris turi dvi šaknis. Taigi, pažymėję $t = x + p/2$ ir $m^2 = p^2/4 - q$ paskutinįjį integralą galime perrašyti tokiu būdu:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}} \mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{(x+\frac{p}{2})^2 - m^2}} \mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{A(t-p/2)+B}{\sqrt{t^2-m^2}} \mathrm{d}t = \frac{A}{2} \int \frac{\mathrm{d}(t^2-m^2)}{\sqrt{t^2-m^2}} +$$

$$(B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-m^2}} = \frac{A}{4}\sqrt{t^2-m^2} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-m^2}} =$$

$$A\sqrt{t^2-m^2} + (B - \frac{Ap}{2}) I_1.$$

Paskutinįjį integralą suintegruosime kiek vėliau. Dabar panagrinėkime atvejį, kai $p^2/4 - q < 0$. Pažymėję $u = x + p/2$ ir $n = p^2/4 - q$ gauname, kad

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{x^2+px+q}} \mathrm{d}x = \int \frac{A(u-p/2)+B}{\sqrt{u^2+n^2}} \mathrm{d}u =$$

$$\frac{A}{2} \int \frac{\mathrm{d}(u^2+n^2)}{\sqrt{u^2+n^2}} + (B - \frac{Ap}{2}) \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+n^2}} =$$

$$A\sqrt{u^2+n^2}+(B-\frac{Ap}{2})I_2.$$

Integralams I_1, I_2 integruoti yra naudojamas specialus būdas, vadinamas Eulerio meto-du. Aptarsime šį metodą. Nagrinėsime integralą

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+px+q}\big)\mathrm{d}x, a \in \mathcal{R}, a \neq 0.$$

Simboliu $R(,)$ žymėsime racionalųjį reiškinį, priklausantį nuo skliaustuose esančių dydžių.

Pastarasis integralas visada yra racionalizuojamas t.y. yra pakeičiamas dviejų polinomų santykiu, atlikus keitinį

$$\sqrt{ax^2+px+q} = \pm x\sqrt{a}+t, \quad jei \quad a>0 \tag{12}$$

ir

$$\sqrt{ax^2+px+q} = xt+\sqrt{q}, \quad jei \quad q>0.$$

Integruokime (12) reiškinį. Pastebėsime, kad ženklas $\pm$ prieš skaičių $\sqrt{q}$ pasirenkamas laisvai. (12) lygybės abi puses pakėlę kvadratu ir išreiškę kintamąjį x iš gautosios lygybės, gauname

$$x = \frac{t^2-q}{b-2\sqrt{a}t}.$$

Tada

$$\mathrm{d}x = \frac{-2\sqrt{a}t^2+2tb-2q\sqrt{a}}{(b-2\sqrt{a}t)^2}\mathrm{d}t.$$

Matome, kad $\sqrt{ax^2+bx+q}$, atlikus minėtą keitinį, tampa racionaliu reiškiniu. Be to $\mathrm{d}x$ taip pat yra racionali t funkcija. Taigi ir visas pointegrinis reiškinys yra racionalus reiškinys. Dabar integruodami jau taikome nagrinėtus, racionaliųjų funkcijų, integravimo metodus.

Suintegruokime reiškinį

$$I(a) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x.$$

Atlikę keitimą $\sqrt{x^2+a^2} = -x+t^2$ gauname, kad

$$x^2+a^2 = x^2-2xt+t^2.$$

Tada

$$x = \frac{t^2-a^2}{2t}.$$

Suskaičiavę diferencialą turime,

$$\mathrm{d}x = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\mathrm{d}t, \quad \sqrt{x^2+a^2} = -\frac{t^2-a^2}{2t}+t = \frac{t^2+a^2}{2t}.$$

Taigi,

$$I(a) = \int \frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}}{\frac{t^2+a^2}{2t}}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$\ln|t|+c_1 = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c.$$

8.8 Trigonometrinių reiškinių integravimas

Šiame skyrelyje nagrinėsime trigonometrinių funkcijų integravimo metodus, jų racionalizavimo (naudojant keitinius trigonometrinius reiškinius pakeičiame racionaliais reiškiniais) galimybes. Be abejo, mes aptarsime tik tam tikrų trigonometrinių funkcijų klasių integravimo galimybes.

Nagrinėsime tokį integralą
$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x. \tag{13}$$
Parodysime, kad naudodami keitinį $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$, (13) integralą galime racionalizuoti visada.

Nesunku suprasti, kad
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$$
$$\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = 1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = 1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
Beje
$$x = 2\mathrm{arctg}t, \ \ \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$
Grižkime prie (13) reiškinio. Turime, kad
$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\big)\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$
Matome, kad paskutinysis reiškinys yra racionalus.

Pastebėsime, kad racionalizavus (13) integralą dažnai gautoji racionalioji pointegrinė funkcija yra gana griozdiška, todėl ją integruoti būna gana sunku. Dėl šios priežasties, užuot naudojus šį "universalų" keitinį, kai kuriais atvejais (13) integralą galima integruoti ir paprasčiau. Panagrinėkime šiuos atskirus atvejus.

1) Tarkime duotas integralas
$$\int R(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int R(\sin x)\mathrm{d}\sin x.$$
Nesunku suprasti, kad atlikus keitimą $t = \sin x$ gauname racionalųjį reiškinį:
$$\int R(t)\mathrm{d}t.$$

2) Analogiškai racionalizuojamas ir integralas
$$\int R(\cos x)\sin x\mathrm{d}x.$$
Šiuo atveju naudojame keitinį $t = \cos x$.

3) Jeigu pointegrinis reiškinys yra tik $\mathrm{tg}x$ arba tik $\mathrm{ctg}x$ funkcija, tai šiuo atveju pointegrinį reiškinį racionlizuojame tokiu būdu $t = \mathrm{tg}x$ arba $t = \mathrm{ctg}x$. Beje, nesunku suprasti, kad abiem šiais atvejais galime naudoti tą patį keitinį. Tad šiuo atveju turime, kad
$$x = \mathrm{arctg}t, \ \ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$
Arba
$$\int R(\mathrm{tg}x)\mathrm{d}x = \int R(t)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

4) Nagrinėkime integralą

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x.$$

a) Tarkime, kad reiškinyje $R(,)$ funkcijos $\sin x$ ir $\cos x$ yra lyginiais laipsnias. Tada naudojamas keitinys $t = \mathrm{tg}x$, kuriuo pointegrinis reiškinys yra racionalizuojamas. Šiuo atveju

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

ir

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

Nagrinėkime funkciją

$$R(\sin x, \cos x) = \sin^m x \cos^n x.$$

b) Tarkime, kad $n = 2p+1$. Tada integralą pertvarkome taip:

$$I_1 = \int \sin^m x \cos^{2p+1} x\mathrm{d}x = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x.$$

Naudodami keitinį $t = \sin x$ gauname,

$$I_1 = \int t^m(1-t^2)^p \mathrm{d}t.$$

Matome, kad paskutinysis reiškinys integruojamas labai nesudėtingai.

c) Tarkime, kad $m = 2p, \quad n = 2q$. Šiuo atveju naudosime "laipsnių pažeminimo metodą." Prisiminkime formules

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Naudodamiesi šiomis tapatybėmis gauname

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x\mathrm{d}x =$$

$$\int \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\Big)^p \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big)^q \mathrm{d}x$$

Keldami pointegrinį reiškinį p, q laipsniais ir grupuodami daugiklius gausime arba b) atvejį, arba jau nagrinėjamą situaciją, tik su dvigubai mažesniais laipsniais. Tęsdami šį procesą paskutiniame žingsnyje gausime integralą

$$\int \cos(lx)\mathrm{d}x,$$

kuris integruojamas žinomu būdu.

Pateiksime keletą taikomojo pobūdžio pavyzdžių.

Pavyzdys Tarkime, kad produkcijos poreikių funkcija apibėžta tokiu būdu: $f(q) = 100 - 0,05q$, čia p yra vieneto kaina, q vienetams. Tarkime, kad pasiūlos funkcija $p = g(q) = 10+0,1q$. Apskaičiuokite vartojimo perteklių ir gamybos perteklių, kai buvo pasiektas rinkos pusiausvyros taškas.

Išsprendę šių funkcijų sistemą randame susikirtimo tašką, kuris ir bus pusiausvyros taškas $q_0 = 600$. Tada $p_0 = 70$.

Tada vartojimo perteklius CS bus lygus

$$CS = \int_0^{q_0} f(q) - p_0 \mathrm{d}q = \int_0^{600} (100 - 0,05q - 70)\mathrm{d}q = \big(30q - 0,05\frac{q^2}{2}\big)|_0^{600} = 900.$$

Analogiškai, gamybos perteklius PS bus lygus

$$PS = \int_0^{q_0} p_0 - g(q)\mathrm{d}q = \int_0^{600} (70 - 10 - 0,1q)\mathrm{d}q = \big(60q - 0,1\frac{q^2}{2}\big)|_0^{600} = 18000.$$

Čia randame bendrą vartojimo (gamybos) perteklių, kai žinomas pusiausvyros taškas.

8.9 Netiesioginis integralas.

Tarkime, kad funkcija $y = f(x)$ apibrėžta ir tolydi intervale $[a, +\infty)$. Tarkime, kad $b > a$. Tada integralas

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

egzistuoja. Nagrinėsime atvejį, kai $b \to \infty$.

Apibrėžimas *Ribą,*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a),$$

jeigu ji egzistuoja, vadinsime funkcijos $f(x)$ netiesioginiu integralu intervale $[a, +\infty)$ ir žymėsime

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

Trumpai žymėsime

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Pastebėsime, kad jeigu minėtoji riba neegzistuoja, tai sakysime, kad integralas diverguoja.

Visiškai analogiškai yra apibrėžiamas netiesioginis integralas neigiamų realiųjų skaičių intervale arba visoje realiųjų skaičių aibėje, atitinkamai

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty} \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to-\infty} (F(a) - F(b))$$

ir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x + \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x, \ a \in \mathcal{R}.$$

Pateiksime keletą pavyzdžių, kuriuose panagrinėsime integralų-konvergavimo problemą.

Pavyzdys

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} F(r) - F(1),$$

kai

$$F(x) = \int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = -\frac{x^{-2}}{2}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2} = -0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Integralas konverguoja.

Pavyzdys

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} F(r) - F(1),$$

kai

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2(\sqrt{x}).$$

Tada

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} (2\sqrt{r} - 2) = \infty.$$

Šis integralas diverguoja.

Pavyzdys

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \lim_{\substack{r\to\infty,\\ t\to-\infty}} F(r) - F(t),$$

kai

$$F(x) = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x.$$

$$\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^t = 0, \quad \lim_{r\to\infty} \mathrm{e}^t = \infty,$$

taigi integralas diverguoja.

Teorema 5. *Tarkime, kad* $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, *visiems* $x \ge a$.

1. *Jeigu integralas*

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

diverguoja, tai diverguoja ir integralas

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

2. *Jeigu integralas*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

konverguoja, tai konverguoja ir integralas

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x$$

ir be to

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Šios teoremos įrodymą paliekame skaitytojui, pastebėję, kad reikia naudotis ribų savybėmis, nelygybėse.

Teorema 6. *Tarkime, kad integralas*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x \tag{14}$$

konverguoja, tada konverguoja ir integralas

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Beje, jeigu (14) integralas konverguoja, tai sakysime, kad integralas (15) konverguoja absoliučiai.

$\ominus$

Pastebėsime, kad $|f(x)| = f^+(x)+f^-(x)$, čia $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ir $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$.

Tada, (14) integralą galime perrašyti tokiu būdu:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x = \int_{D_1} f^+(x)\mathrm{d}x + \int_{D_2} f^-(x)\mathrm{d}x, \tag{16}$$

čia $D_1 = \{x \in \mathcal{R}; f(x) > 0\}$, $D_2 = \{x \in \mathcal{R}; f(x) < 0\}$. Kadangi funkcija $y = f(x)$ yra tolydi, tai sritys D_1, ir D_2 yra intervalai, arba jų sąjungos.

Matome, kad jei (14) integralas konverguoja, tai konverguoja ir (16) integralo dešinės pusės abu integralai. Iš pastarųjų integralų konvergavimo išplaukia, kad konverguoja (15) integralas.

$\oplus$

Nagrinėsime kiek kitokio pobūdžio netiesioginius integralus. Šio skyrelio pradžioje mes nagrinėjome funkcijas, kurios yra tolydžios integruojamoje srityje, tačiau bent vienas iš rėžių yra begalinis. Sąvoka 'netiesioginis' vartojama dėl to, kad toks integralas yra skaičiuojamas ne iš karto, bet naudojant tarpinį žingsnį.

Tarkime, kad integruojamos srities kokiame nors taške, tarkime b, funkcija yra trūki. Suprantama, kad šiuo atveju negalime skaičiuoti integralo

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

kadangi sudarytoji integralinė suma taške b bus neapibrėžta. Tada šiuo atveju elgsimės panašiai kaip ir pirmoje šio skyrelio dalyje, t.y. suskaičiuosime tarpinį integralą.

Apibrėžimas *Funkcijos $y = f(x)$ integralu intervale $[a, b]$ (funkcija $y = f(x)$ yra trūki taške b) vadinsime tokią ribą*

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-0}\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x,$$

jeigu ji egzistuoja. Jei riba neegzistuoja, tai šį integralą vadinsime diverguojančiu.

Pastebėsime, kad jeigu funkcija $y = f(x)$ intervalo $[a, b]$ viduje turi trūkio tašką x_0, tai šios funkcijos integralą intervale $[a, b]$ užrašome dviejų netiesioginių integralų suma, intervaluose $[a, x_0]$ ir $[x_0, b]$.

Pavyzdys Apskaičiuokime integralą

$$I = \int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\epsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x + \lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Big(G(1-\epsilon) - G(0) + F(2) - F(1+\epsilon)\Big).$$

Randame nagrinėjamų integralų neapibrėžtinius integralus (pirmines funkcijas):

$$G(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = -2\sqrt{1-x}, \text{ ir } F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x-1}.$$

Nesunkiai gauname, kad $I = -2(0-1) + 2(1-0) = 4$.

Teoriniai klausimai

1. Apibrėžtinio integralo apibrėžimas
2. Apibrėžtinio integralo savybės
3. Neapibrėžtinio integralo apibrėžimas ir jo savybės
4. Niutono Leibnico formulė
5. Integravimo metodai
6. Netiesioginiai integralai ir jų skaičiavimas. Ploto skaičiavimas.

Uždaviniai savarankiškam darbui

1. Naudodamiesi integralų lentele apskaičiuokite nurodytus integralus:

$$1) \int x^2 - 3x + \sqrt{x}\mathrm{d}x;\ 2) \int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x;\ 3) \int (1+\frac{1}{\sqrt{x}})\sqrt{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x;$$

$$4) \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x;\ 5) \int \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x;\ 6) \int \mathrm{tg}^2\mathrm{x}\mathrm{d}x;$$

$$7) \int (2^3+7^x)^2\mathrm{d}x;\ 8) \int \frac{1}{x+5}\mathrm{d}x;\ 9)\ \sqrt{2-3x}\mathrm{d}x;$$

$$10) \int \frac{1}{\sqrt{4-6x}}\mathrm{d}x;\ 11) \int \frac{1}{2+3x^2}\mathrm{d}x;\ 12) \int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}}\mathrm{d}x;$$

$$13) \int \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x;\ 14) \int e^{-3x}\mathrm{d}x;\ 15) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x.$$

Ats: 1) $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$; 2) $\frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}}$; 3) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + c$;
4) $x - \mathrm{arctg}\, x + c$; 5) $|\cos x - \sin x| + c$; 6) $\mathrm{tgx} - x + c$;
7) $64x + \frac{16}{\ln 7}7^x + \frac{17^{2x}}{2\ln 7} + c$; 8) $\ln|x+5| + c$; 9) $-\frac{2}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$;
10) $-\frac{1}{6}\sqrt{4-6x} + c$; 11) $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arctg}\,(x\sqrt{\frac{3}{2}}) + c$; 12) $\frac{12}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}} + c$;
13) $\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2}) + c$; 14) $-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x} + c$; 15) $\ln|x + \sqrt{x^2-2}| + c$;

2. Remdamiesi diferencialo savybėmis apskaičiuokite nurodytus integralus:

$$1) \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\mathrm{d}x;\ 2) \int \frac{x}{3-5x^2}\mathrm{d}x;\ 3) \int \frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x;$$

$$4) \int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\mathrm{d}x;\ 5) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x;\ 6) \int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$7) \int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x;\ 8) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x;\ 9) \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$10) \int \frac{x^4}{(x^5+1)^4}\mathrm{d}x;\ 11) \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\mathrm{d}x;\ 12) \int \frac{3^x}{9^x-1}\mathrm{d}x.$$

Ats: 1) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + c$; 2) $-\frac{1}{10}\ln|3-5x^2| + c$; 3) $\ln(\mathrm{e}^x+1) + c$;
4) $2\mathrm{arctg}\sqrt{x} + c$; 5) $-\ln|\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}| + c$; 6) $\cos\frac{1}{x} + c$;

7) $\operatorname{arctg}(e^x+1)+c$; 8) $2\sqrt{\sin x}+c$; 9) $\frac{1}{2}\ln|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}|+c$;
10) $\frac{1}{15}\frac{1}{(x^5+1)^3}+c$; 11) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\sqrt{2}\cos x+\sqrt{1+2\cos^2 x}+c;1)$ $-\frac{1}{2\ln 3}\ln|\frac{1+3^x}{1-3^x}|+c$;

3. Naudodami polinomų dalybos taisykle, bei neapibrėžtinių koeficientų metodą suintegruokite:

$$1)\ \int\frac{2x^3+3x^2+x+1}{1+2x}\mathrm{d}x;\ 2);\ \int\frac{x+3}{x+6}\mathrm{d}x;\ 3)\ \int\frac{2x^4-8x^3-6x^2+4}{x^3}\mathrm{d}x;$$

$$4)\ \int\frac{3+2x}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x;\ 5)\ \int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+60x}\mathrm{d}x;$$

$$6)\ \int\frac{x}{x^3-3x+2}\mathrm{d}x;\ 7)\ \int\frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x;\ 8)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Ats: 1) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c$; 2) $x-3\ln(x+6)+c$; 3) $x^2-8x-6\ln|x|-\frac{2}{x^2}+c$;
4) $\ln|\frac{x-2}{x+5}|+c$; 5) $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+c$;
6) $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln|\frac{x-1}{x+2}|+c$; 7) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}c$; 8) $\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}x+c$.

4. Kvadratinį trinarį pakeitę dviejų kvadratų suma arba skirtumu bei tinkamai pažymėję suintegruokite pateiktuosius integralus:

$$1)\int\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x;\ 2)\ \int\frac{x}{x^4+3x^2+2}\mathrm{d}x;\ 3)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x-1};$$

$$4)\ \int\frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1};\ 5)\ \int\frac{x+1\mathrm{d}x}{x^2+x+1};\ 6)\ \int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{5+x-x^2}};$$

$$7)\ \int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}};\ 8)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x;\ 9)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\cos x+3};$$

Ats: 1) $\frac{1}{3}\ln|\frac{x-1}{x+2}|+c$; 2) $\frac{1}{2}\ln|\frac{x^2+1}{x^2+2}|+c$; 3) $\frac{1}{4}\ln|\frac{x-1}{3x+1}|+c$;
4) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}-1}|+c$; 5) $\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|++\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}c$; 6) $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}|+c$;
7) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}+c$; 8) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}|+c$; 9) $\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})+1}{2}+c$.

5. Atlikę tinkamą keitinį suintegruokite iracionalius reiškinius:

$$1)\ \int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-3x}};\ 2)\ \int\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\mathrm{d}x;\ 3)\ \int x\sqrt{\frac{x}{3-x}}\mathrm{d}x;\ \ 4)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}};$$

Ats: 1) $-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+c$; 2) $-\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+c$; 3) $-\frac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)}+3\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}+c$; 4) $2\sqrt{x}-2\ln 1+\sqrt{x}+c$;

6. Naudodamiesi integravimo dalimis formule suintegruokite:

$$1)\ \int\operatorname{arctg}x\mathrm{d}x;\ 2)\ \int x^2e^{-2x}\mathrm{d}x\ 3)\ \int x^2\sin(2x)\mathrm{d}x;\ 4)\ \int x^2\ln x\mathrm{d}x;$$

$$5)\ \int\operatorname{arcctg}(\sqrt{x})\mathrm{d}x;\ 6)\ \int\sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x;\ 7)\ \int\sin(2x)e^{3x}\mathrm{d}x;\ 8)\ \int\cos\ln x\mathrm{d}x;$$

9) $\int x^2\sqrt{4+x^2}\mathrm{d}x$ 10) $\int \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{x^2}\mathrm{d}x$; 11) $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x$; 12) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Ats: 1) $x\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$; 2) $-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}(x^2+x+\frac{1}{2})+c$;
3) $-\frac{2x^2-1}{4}\cos(2x)+\frac{x}{2}\sin(2x)\sqrt{\frac{x}{2}}+c$; 4) $\frac{x^3}{3}\cdot(\ln x-\frac{1}{3})+c$;
5) $-\sqrt{x}+(x+1)\mathrm{arctg}\sqrt{x}$ 6) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+3}|+c$;
7) $\mathrm{e}^{3x}\left(\frac{-2\cos(2x)+3\sin(2x)}{13}\right)+c$; 8) $\frac{x}{2}\cdot(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+c$;
9) $\frac{x(2x^2+4)}{8}\sqrt{4+x^2}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{4+x^2})+c$; 10) $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}|+c$;
11) $-\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln|\frac{1-x}{1+x}|+c$; 12) $2(\sqrt{x}-1)\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{2}}+c$.

7. Suintegruokite pateiktus trigonometrinius reiškinius

$$1)\ \int\sin^6 x\mathrm{d}x;\quad 2)\ \int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x;\quad 3)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}$$

$$4)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^4 x};\quad 5)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}.$$

$$6)\ \int\sin^4 x\cos^5 x\mathrm{d}x\quad 7)\ \int\frac{\sin^3\mathrm{d}x}{\cos^4 x}\quad 8)\ \int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos^4 x}.$$

Ats: 1) $\frac{5x}{16}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{64}\sin(4x)+\frac{1}{48}\sin^3(2x)+c$; 2) $\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin(4x)+\frac{1}{48}\sin^3(2x)+c$;
3) $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln|\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2})|+c$; 4) $-\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln|\mathrm{tg}\,(\frac{x}{2})|+c$;
5) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}|-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{t^2-1}+c,\ t=\sqrt{\mathrm{tg}\,x}$; 6) $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$;
7) $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+c$; 8) $-8\mathrm{ctg}\,(2\mathrm{x})-\frac{8}{3}\mathrm{ctg}^3\,(2\mathrm{x})+c$.

8. Naudodami Niutono-Leibnico formulę apskaičiuokite pateiktus integralus:

$$1)\ \int_{-1}^{3}(3x^2+x+6)\mathrm{dx};\quad 2)\ \int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{dx};\quad 3)\ \int_0^2 x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{dx};$$

$$4)\ \int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}\quad)\ \int_0^2|1-x|\mathrm{dx}\quad 6)\ \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln\mathrm{x}|\mathrm{dx}.$$

$$7)\ \int_0^{\sqrt{3}}x\mathrm{arctg}x\mathrm{dx}\quad 8)\ \int_{0.5}^{0.75}\frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}+1)\sqrt{\mathrm{x}^2+1}}\quad 17)\ \int_0^{\ln 2}xe^{-x}\mathrm{dx}.$$

Ats: 1) 48; 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$; 3) $\frac{\mathrm{e}^8-1}{3}$; 4) $\frac{\ln 3-\pi/\sqrt{3}}{2}$; 5) 1;
6) $2(1-\frac{1}{\mathrm{e}})$; 7) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right)$; 9) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

9. Raskite plokštumos srities plotą, kurią riboja kreivės:

1) $y=x^2+2x+2,\ \ y=0,\ \ x=-2.$

2) $y=x^2-x-2,\ \ y=0,\ \ x=-2,\ x=2.$

3)

$$f(x)=\begin{cases}3x^2,\ \text{jei}\ \ 0\le x<2,\\ 16-2x,\ \text{jei}\ \ x\ge 2,\end{cases}\quad,\ \ y=0,\ \ x=3.$$

4) $y^2=4x,\quad y=3,\ \ =x=0.$

5) $y=|\lg x|,\ y=0,x=0.1,\ x=10.$

6) $y=-x^2+4x+8, \quad y=x^2-2x.$

7) $y=8-x^2,\ y=x^2,\ x=-1,\ x=1.$

8) $y=\mathrm{e}^{-x}|\sin x|,\ y=0, x\geq 0.$

Ats: 1) 6; 2) $\frac{19}{3}$; 3) 19; 4) $\frac{9}{4}$; 5) $9.9-8.1\lg \mathrm{e}$; 6) $\frac{125}{3}$; 7) $\frac{44}{3}$; 8) ≈ 0.546.

10. Apskaičiuokite netiesioginius integralus:

$$1)\ \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{dx}\quad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{dx}\quad 3)\ \int\limits_0^1\frac{1}{x}\mathrm{dx}$$

$$4)\ \int_0^1\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}}}\quad 5)\ \int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{dx}\quad 6)\ \int_{-\infty}^{-2}\frac{\mathrm{dx}}{(\mathrm{x}+1)^3};$$

$$7)\ \int_0^3\frac{x\mathrm{dx}}{\sqrt{9-\mathrm{x}^2}}\quad 8)\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+2}\quad 9)\ \int_{-1}^1\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}$$

$$10)\ \int_0^1\ln x\mathrm{dx}\quad 11)\ \int_0^1\frac{\mathrm{dx}}{(2-\mathrm{x})\sqrt{1-\mathrm{x}}}\quad 12)\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{x}^3}.$$

Ats: 1) $\frac{1}{2}$; 2) diverguoja; 3) diverguoja; 4) 2; 5) 0; 6) -0.5; 7) 3; 8) $\ln 0.5$; 9) π; 10) -1; 11) $\frac{\pi}{2}$; 12) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

11) Kokia turi būti parametro k reikšmė, kad būtų teisinga lygybė:

$$\int\limits_{800}^{\infty}f(x)\mathrm{dx}=1,\quad \text{jei}\ \ f(x)=\begin{cases}\frac{k}{x^2},\ \text{jei}\ \ x\geq 800,\\ 0,\ \text{jei}\ \ x<800.\end{cases}$$

Ats: 800.

12. Remiantis apibrėžtinio integralo apibrėžimu suskaičiuokite $\int\limits_1^3(3x-1)\mathrm{dx}.$

Privalomos savarankiško darbo užduotys

1. Naudodamiesi integralų lentele apskaičiuokite nurodytus integralus:

$$1)\ \int x^2-x+\sqrt{x}\mathrm{d}x;\ 2)\ \int\frac{\sqrt[3]{x^2}+5}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x;\ 3)\ \int(1+\frac{1}{\sqrt{x}})\sqrt{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x.$$

2. Remdamiesi diferencialo savybėmis apskaičiuokite nurodytus integralus:

$$1)\ \int\frac{x^2}{\sqrt{3-2x^3}}\mathrm{d}x;\ 2)\ \int\frac{x}{4-6x^2}\mathrm{d}x;\ 3)\ \int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+4}\mathrm{d}x;$$

$$4)\ \int\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\mathrm{d}x;\ 5)\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x;\ 6)\ \int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

3. Naudodami polinomų dalybos taisykle, bei neapibrėžtinių koeficientų metodą suintegruokite:

$$1)\ \int\frac{2x^3+x^2+x+1}{1+2x}\mathrm{d}x;\ 2)\ \int\frac{2x+3}{x+6}\mathrm{d}x;\ 3)\ \int\frac{x^4-8x^3-6x^2+4}{x^2}\mathrm{d}x.$$

4. Kvadratinį trinarį pakeitę dviejų kvadratų suma arba skirtumu bei tinkamai pažymėję suintegruokite pateiktuosius integralus:

$$1) \int \frac{1}{x^2+2x-2}\mathrm{d}x;\ 2) \int \frac{x}{x^4+x^2+2}\mathrm{d}x;\ 3) \int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-x-4}.$$

5. Naudodamiesi integravimo dalimis formule suintegruokite:

$$1) \int \mathrm{arctg} x\mathrm{d}x;\ 2) \int x^2e^{-2x}\mathrm{d}x;\ 3) \int x^2\sin(2x)\mathrm{d}x;\ 4) \int x^2\ln x\mathrm{d}x;$$

$$5) \int \mathrm{arcctg}(\sqrt{x})\mathrm{d}x;\ 6) \int \sqrt{x^2+3}\mathrm{d}x;\ 7) \int \sin(2x)e^{3x}\mathrm{d}x;\ 8) \int \cos\ln x\mathrm{d}x.$$

6. Naudodami Niutono-Leibnico formulę apskaičiuokite pateiktus integralus:

$$1) \int_{-1}^{3}(3x^2+x+6)\mathrm{d}x;\quad 2) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}\mathrm{d}x;\quad 3) \int_0^2 x^2\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x;$$

$$4) \int_{-1}^{1}\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+x+1};\ 5) \int_0^2 |1-x|\mathrm{d}x;\ 6) \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x|\mathrm{d}x.$$

7. Raskite plokštumos srities plotą, kurią riboja kreivės:

1) $y=x^2+x+2,\ \ y=0,\ \ x=-2.$

2) $y=x^2-2x-2,\ \ y=0,\ \ x=-2,\ x=2.$

3)

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+2, \text{ jei } 0\le x<2, \\ 16-2x, \text{ jei } x\ge 2, \end{cases},\quad y=0,\quad x=3.$$

8. Apskaičiuokite netiesioginius integralus:

$$1) \int_1^{\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x;\quad 2) \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x;\quad 3) \int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x;$$

$$4) \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}};\ 5) \int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x;\ 6) \int_{-\infty}^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^3};$$

$$7) \int_0^3\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}};\ 8) \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2};\ 9) \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$10) \int_0^1\ln x\mathrm{d}x;\ 11) \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}};\ 12) \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}.$$