IX. FRAKTALŲ INTERPOLIAVIMAS

9.1 Atraktoriaus konstravimas naudojant duomenų aibes .

Plokštumos taškų aibę

$$\{(x_i, F_i), i = 1, \ldots, N\},\ x_0 < x_1 < \ldots < x_N \tag{1}$$

vadinsime (1) *duomenų aibe*, trumpai (1) D.A.. Taškus $(x_i, F_i) \in \mathcal{R}^2$ vadinsime interpoliaciniais taškais.

Ateityje (1) apibrėžimą trumpinsime (1) D.A..

Tolydžią funkciją

$$f : [x_0, x_N] \longrightarrow \mathcal{R},\quad f(x_i) = F_i, i = 1, \ldots, N \tag{2}$$

vadinsime, (1) duomenų aibės, *interpoliacine funkcija.* Aišku, kad interpoliacinės funkcijos grafikui priklauso interpoliaciniai taškai. Tarkime, kad funkcija f apibrėžta (2) lygybe yra laužtė, jungianti (1) D.A. taškus, t.y.

$$f(x) = F_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (F_i - F_{i-1}),\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, N \tag{3}$$

(prisiminkite tiesės, kuriai priklauso du žinomi taškai, lygtį).

Apibrėžkime IAS, tokiu būdu:

$$\{\mathcal{R}^2; \omega_n, n = 1, \ldots, N\}$$

čia

$$\omega_n(x, y) = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_n + e_n \\ xc_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

ir

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0},\ e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0},$$

$$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0}, b_n = \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0},\quad n = 1, \ldots.$$

Pasirodo, kad tarp šios IAS atraktoriaus ir (3) funkcijos grafiko egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis (bijekcija).

9.1 Teorema *Tarkime, kad funkcija f apibrėžta* (3) *sąryšiu. Tegu G yra šios funkcijos grafikas. Tada* (4) *IAS atraktorius yra aibė*

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_n(G).$$

$\ominus$

Iš pradžių parodysime, kad jei taškas priklauso (4) transformacijos atraktoriui, tai jis priklauso ir (3) funkcijos grafikui. Pastebėsime, kad jei $(x, y) \in G$, apibrėžtai teoremoje, tai egzistuoja $i \in \{1, \ldots, N\}$, kad $(x, y) \in w_i(x, y)$.

Tarkime, kad taškas $(x, y) \in G$. Tuomet išplaukia, kad

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i x \\ c_i y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

arba

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}\right) \cdot x + \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0} \\ \left(\frac{F_i - F_{i-1}}{x_N - x_0}\right) \cdot x + \frac{x_N F_{i-1} - x_0 F_i}{x_N - x_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}.$$

Patikrinsime, kokiam plokštumos taškui, $i-$ oji transformacija priskiria grafiko G tašką. Visų pirma pastebėsime, kad iš (3) lygybės išplaukia, kad

$$f(x) = \frac{1}{x_{i-1} - x_i}\big((F_{i-1} - F_i)x + F_i x_{i-1} - x_i F_{i-1}\big).$$

Suskaičiavę paskutiniosios funkcijos reikšmę taške x^*, po nesudėtingų, tačiau kruopščių pertvarkymų gauname, kad

$$f(x^*) = \left(\frac{F_i - F_{i-1}}{x_N - x_0}\right) \cdot x + \frac{x_N F_{i-1} - x_0 F_i}{x_N - x_0} = c_i x + b_i = y^*.$$

Taigi, taškas $(x^*, y^*) \in G_i$, čia G_i yra atkarpa, jungianti taškus (x_{i-1}, y_{i-1}) ir (x_i, y_i), visiems $i \in \{1, \ldots N_0\}$.

Iš pastarųjų samprotavimų išplaukia, kad

$$\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(G) \subset G. \tag{5}$$

Įrodysime atvirkštinį sąryšį, t.y., kad (3) funkcijos grafiko taškai yra (4) transformacijos atraktoriaus taškai. Tam pakanka įrodyti, kad $i-$ oji transformacija, grafiko galinius taškus atvaizduoja į $i-$ojo intervalo galinius taškus. O tai įrodys, kad atvaizdis siurjektyvus. Įrašykime x_0 ir x_N į $i-$ osios transformacijos formules. Gauname

$$a_i x_N + e_i = \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}\right) \cdot x_N + \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0} = x_i$$

$$a_i x_0 + e_i = \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{x_N - x_0}\right) \cdot x_0 + \frac{x_N x_{i-1} - x_0 x_i}{x_N - x_0} = x_{i-1}.$$

Matome, kad atvaizdis

$$\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(G)$$

yra siurjekcija. Tada

$$G \subset \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(G).$$

Remdamiesi (5) ir paskutiniuoju sąryšiais gauname, kad

$$G = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(G)$$

.

$\oplus$

Sukonstruosime IAS, apibrėžtą metrinėje erdvėje $\mathcal{R}^2$, kurios atraktorius būtų (2) tolydžios funkcijos grafikas, ir kuriam priklausytų (1) duomenų aibės interpoliaciniai taškai. Tarkime, kad IAS apibrėžia tokiomis afininėmis transformacijomis:

$$\omega_n(x, y) = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Naudodamiesi duotąja D.A., transformacijų seką konstruojame taip, kad

$$\omega_n(x_0, F_0) = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ ir } \omega_n(x_N, F_N) = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \end{pmatrix}, \; n = 1, \ldots, N.$$

Kitaip tariant reikalaujame, kad IAS sudarančios transformacijos būtų siurjektyvios.

Transformacijų seka apibrėžta naudojant penkias konstantas a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, kurias rasime spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_n x_0 + e_n = x_{n-1}, \\ a_n x_N + e_n = x_n, \\ c_n x_0 + d_n F_0 + b_n = F_{n-1}, \\ c_n x_N + d_n F_N + b_n = F_n. \end{cases}$$

Turime penkis nežinomuosius ir keturias lygtis, todėl ši lygčių sistema, jei yra apibrėžta (kokios turi būti išpildytos sąlygos!), tai turi begalo daug sprendinių. Taigi, šiuo atveju trasformacija parenkama ne vienareikšmiškai. Transformaciją konkretizuosime pasirinkdami vieną iš konstantų.

Tarkime, kad pasirenkame d_n. Tuomet transformacijos $\omega_n,\ \ n \in \{1, \dots, N\}$ tieses, lygiagrečias Oy ašiai, atvaizduoja į tieses, kurios taip pat lygiagrečios Oy ašiai. Jeigu L yra atkarpa lygiagreti y ašiai, tai $\omega_n(L)$ taip pat atkarpa, lygiagreti y ašiai. Be to

$$\frac{|\omega_n(L)|}{|L|} = |d_n|.$$

Skaliaras d_n vadinamas transformacijos ω_n *vertikaliuoju mastelio parametru.* Parinkę pastarąjį laisvai, tuo pačiu nurodome santykį, kuriuo dydžiu vaizdas skiriasi nuo pirmvaizdžio. Dydis d_n kartais dar vadinamas suspaudimo parametru. Pastebėsime, kad jei $d_n = 0$, tai (6) transformacijos sutampa su (4) transformacijomis. Tarkime, kad $d_n \in \mathcal{R}$ koks nors žinomas skaičius. Nesunku suskaičiuoti,

$$a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_N - x_0},\ e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}, \tag{7}$$

$$c_n = \frac{F_n - F_{n-1}}{x_N - x_0} - d_n \frac{(F_N - F_0)}{x_N - x_0}, \tag{8}$$

$$b_n = \frac{x_N F_{n-1} - x_0 F_n}{x_N - x_0} - d_n \frac{x_N F_0 - x_0 F_N}{x_N - x_0}, \tag{9}$$

$n = 1, 2, \dots,$

Tarkime, kad transformacijos $\omega_n, n \in \{1, \dots, N\}$ apibrėžtos (6) sąryšiais. Tada teisinga tokia teorema:

9.2 Teorema *Tarkime, kad duota IAS, $\{\mathcal{R}^2; \omega_n, n = 1, \dots, N\}$ ir be to pastarosios transformacijos apibrėžtos* (1) *duomenų aibėje. Tarkime, kad vertikalusis mastelio parametras $d_n \in [0, 1)$. Tuomet erdvėje $\mathcal{R}^2$ egzistuoja metrika ρ, ekvivalenti euklidinei metrikai ρ_2 tokia, kad ir šios metrikos atžvilgiu IAS yra SIAS, t.y. yra spaudžianti IAS . Be to egzistuoja vienintelė kompaktiška aibė $G \subset \mathcal{R}^2$ tokia, kad*

$$G = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(G).$$

$\ominus$ Apibrėžkime metriką ρ minėtoje erdvėje tokiu būdu:

$$\rho\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_1 - x_2| + \theta|y_1 - y_2|, \theta > 0.$$

Matome, kad šios metrika dėka atliekame deformaciją, antrosios koordinatės atžvilgiu. Be to parametrą θ parinksime taip, kad IAS būtų spaudžianti.

Naudodamiesi (7) - (9) lygybėmis gauname,

$$\rho\big(\omega_n(x_1, y_1), \omega_n(x_2, y_2)\big) = \rho\big((a_n x_1 + e_n, c_n x_1 + d_n y_1 + b_n)^T, (a_n x_2 + e_n, c_n x_2 + d_n y_2 + b_n)^T\big) =$$

$$a_n|x_1 - x_2| + \theta|c_n(x_1 - x_2) + d_n(y_1 - y_2) \leq$$

$$(|a_n| + \theta c_n|)x_1 - x_2| + \theta|d_n||y_1 - y_2|.$$

Pastebėkime, kad

$$|a_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_N - x_0|} \le 1.$$

Jeigu $c_i = 0,\ i = 1, \ldots, N$ tai šiuo atveju parenkame $\theta = 1$. Kitu atveju

$$\theta = \frac{\min\limits_{1\le n\le N}\{(1-|a_n|)\}}{\max\limits_{1\le n\le N}\{2|c_n|\}}.$$

Nesunku matyti, kad tuomet

$$\rho\big(\omega_n(x_1,y_1), \omega_n(x_2,y_2)\big) \le (|a_n| + \theta|c_n|)|x_1 - x_2| + \theta|d_n||y_1 - y_2| \le$$

$$|a_n||x_1 - x_2| + \theta\delta||y_1 - y_2| \le \max\{a, \delta\} \cdot \rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big),$$

kur

$$a = \left(\frac{1}{2} + a_n - \frac{\max\limits_{1\le n\le N}\{|a_n|\}}{2}\right) < 1,\ \delta = \max_{1\le n\le N}\{|d_n|\} < 1.$$

$\oplus$

9.3 Teorema *Tarkime, kad duota IAS* $\{\mathcal{R}^2; \omega_n, n = 1, \ldots, N\}$, *apibrėžta* (6) *lygybe, kurios vertikalusis mastelio parametras* $d_n \in [0,1)$. *Tarkime, kad* G *yra* (2) *tolydžios funkcijos grafikas, kuriam priklauso* (1) *D.A. taškai, t.y.*

$$G = \{(x, f(x)); x \in [x_0, x_N]\} \wedge f(x_i) = F_i, i = 0, 1, \ldots, N.$$

.

Tada IAS yra SIAS, kurios atraktorius yra aibė G.

$\ominus$

Sakykime, kad $\mathcal{F}$ yra tolydžių funkcijų $f : [x_0, x_N] \longrightarrow \mathcal{R}$ turinčių savybę $f(x_0) = F_0 \wedge f(x_N) = F_N$ aibė. Apibrėžkime

$$\rho_c(f,g) = \max_{x\in[x_0,x_N]}\{|f(x) - g(x)|\}, f, g \in \mathcal{F}.$$

Tada $(\mathcal{F}, \rho_c)$ metrinė erdvė. (Kodėl?) Sakykime, kad skaičiai a_n, b_n, e_n, b_n apibrėžti (7) - (9) lygybėmis.

Tarkime, kad

$$l_n : [x_0, x_N] \longrightarrow [x_{n-1}, x_n],$$

yra apverčiama tiesinė transformacija, $l_n(x) = a_n x + e_n$.

Tegu $T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ transformacija, apibrėžta tokiu būdu:

$$\big(Tf\big)(x) = c_n l_n^{-1}(x) + d_n f(l_n^{-1}(x)) + b_n,$$

čia $x \in [x_{n-1}, x_n],\ \ n = \{1, \ldots, N\}$.

Parodysime, kad transformacija T erdvę $\mathcal{F}$ atvaizduoja į save pačią. Norint tuo įsitikinti pakanka patikrinti kraštines sąlygas. Taigi,

$$\big(Tf\big)(x_0) = c_1 l_1^{-1}(x_0) + d_1 f(l_1^{-1}(x_0)) + b_1 = c_1 x_0 + d_1 f(x_0) + b_1 = c_1 x_0 + d_1 F_0 + b_1 = F_0,$$

$$\big(Tf\big)(x_N) = c_N l_N^{-1}(x_N) + d_N f(l_N^{-1}(x_N)) + b_n = c_N x_N + d_N f(x_N) + f_N = c_N x_N + d_N F_N + b_N = F_N.$$

Ši transformacija yra tolydi intervale $[x_0, x_N]$. Kyla klausimas, ar šios transformacijos reikšmė intervalų galuose apibrėžta vienareikšmiškai? Pastebėkime, kad

$$\big(Tf\big)(x_n) = c_{n+1} l_{n+1}^{-1}(x_n) + d_{n+1} f(l_{n+1}^{-1}(x_n)) + b_{n+1} = c_{n+1} x_n + d_{n+1} f(x_n) + b_{n+1} = F_n.$$

Antra vertus

$$\big(Tf\big)(x_n) = c_n l_n^{-1}(x_n) + d_n f(l_n^{-1}(x_n) + b_n = c_n x_N + d_n f(x_N) + b_n = F_n.$$

Matome, reikšmė ta pati, taigi funkcija apibrėžta vienareikšmiškai.

Dabar parodysime, kad ši transformacija yra spaudžiantis atvaizdis. Sakykime, $f, g \in \mathcal{F}$ ir $n \in \{1, \ldots, N\}$.

Fiksuokime $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Nesunku matyti, kad

$$|\big(Tf\big)(x) - \big(Tg\big)(x)| = |d_n||f(l_n^{-1}(x)) - g(l_n^{-1}(x))|| \le |d_n|\rho(f,g) \Rightarrow \rho(Tf, Tg) \le \delta\rho(f,g),$$

čia $\delta = \max\{|d_n|; n = 1, \ldots, N\} < 1$. Gauname, kad nagrinėjamas atvaizdis yra spaudžianti transformacija. Tuomet egzistuoja vienintelis šios transformacijos nejudamas taškas. Kitaip tariant, egzistuoja funkcija $f \in \mathcal{F}$ tokia, kad $Tf(x) = f(x), x \in [x_0, x_N]$. Sakykime, kad $\overline{G}$ yra šios funkcijos grafikas. Pastebėkime, kad

$$\big(Tf\big)(a_n x + e_n) = c_n x + d_n f(x) + b_n,$$

kai $x \in [x_0, x_N], n = 1, \ldots, N$. Tuomet

$$\overline{G} = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(\overline{G}),$$

čia $\overline{G}$ netuščia, kompaktiška $\mathcal{R}^2$ aibė. Vadinasi, egzistuoja netuščia kompaktiška aibė G, kurios IAS atraktorius sutampa su šiuo grafiku. Vadinasi

$$\overline{G} = G.$$

$\oplus$

Pastebėkime, kad transformaciją T galime įsivaizduoti kaip laužčių seką, kuriai priklauso duomenų aibės taškai.

Funkciją $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, kurios grafikas sutampa su IAS, apibrėžtos paskutinėje teoremoje, atraktoriumi, vadinsime *fraktaline funkcija susieta su duomenų aibe.*

Apibrėžkime $SIAS$ tokiu būdu:

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(B), \quad B \in H(\mathcal{R}^2).$$

Tada seka

$$\{A_n = W^n(A_0)\}$$

$\{A_n\}$ yra Koši seka, kuri Hausdorfo metrikos atžvilgiu konverguoja į SIFS atraktorių G. Pastebėsime, kad jei A_0 funkcijos $f \in \mathcal{F}$ grafikas, tai A_n yra transformacijos $T^n(f)$ grafikas.

Taigi, iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad fraktalines kreives galime modeliuoti kompaktiškų aibių sekomis.

9.2 Fraktalinių interpoliacinių funkcijų fraktalinė dimensija

9.4. Teorema *Sakykime, kad duota* (1) *D.A.. Be to*

IAS $\{\mathcal{R}^2; \omega_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$ *apibrėžta* (6) *afininėmis transformacijomis. Tarkime,kad G yra Be to, tarkime, kad šios IAS atraktorius G yra interpoliacinės funkcijos, kurios* (1) *duomenų aibė, grafikas. Jeigu*

$$\sum_{n=1}^{N} |d_n| > 1$$

ir interpoliaciniai taškai nepriklauso vienai tiesei, tai tuomet G fraktalinė dimensija D yra vienintelis lygties

$$\sum_{n=1}^{N} |d_n| {a_n}^{D-1} = 1$$

sprendinys. Kitu atveju G fraktalinė dimensija lygi 1.

Šios teoremos įrodymas gana sudėtingas ir reikalauja nemažai papildomų rezultatų, tad įrodymo nepateiksime.

Panagrinėkime fraktalinės interpoliacinės funkcijos fraktalinę dimensiją tuo atveju kai

$$x_i = x_0 + \frac{i}{N}(x_N - x_0), \quad i = 0, \dots N, \; a_n = \frac{1}{N}.$$

Remdamiesi paskutiniąja teorema turime, kad

$$\sum_{i=1}^{N} |d_n| (\frac{1}{N})^{D-1} = \left(\frac{1}{N}\right)^{D-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} |d_n| = 1.$$

Tada

$$D = 1 + \frac{\ln(\sum\limits_{i=1}^{N} |d_n|)}{\ln N}.$$

Sakykime, kad

$$\sum_{i \le n} |d_n| < N.$$

Tuomet nagrinėjamos kreivės fraktalinė dimensija ne didesnė už 2.

Jeigu

$$\sum_{i \le n} |d_n| > 1$$

tai tuomet fraktalinė dimensija didesnė už 1, nors gali būti ir labai artima vienetui. Pastebėsime, kad jei interpoliaciniai taškai nepriklauso vienai tiesei, tai fraktalinė dimensija nepriklauso nuo taškų $\{F_i, i = 0, \dots, N\}$ parinkimo,

9.3 Fraktalų interpoliavimas naudojant "paslėptą" parametrą

Tarkime, kad $(Y, \rho_y)-$ metrinė erdvė. Tegu $I \subset \mathcal{R}$. Aibę

$$(1'), \qquad \left\{(x_i, F_i) \in \mathcal{R} \times Y; i = 0, \dots, \mathcal{N}\right\}$$

kai $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, vadinsime apibendrinta duomenų aibe, trumpai- (1') A.D.A..

Tarkime, kad funkcija $f : I \to Y$. Tada

$$G = \{(x, f(x)) \in I \times Y\}$$

yra šios funkcijos grafikas.

Interpoliacine funkcija, atitinkančia šią duomenų aibę, vadiname bet kokią tolydžią funkciją

$$f : [x_0, x_N] \longrightarrow Y, \; \wedge \; f(x_i) = F_i, i = 0, \dots, N.$$

Taškus $(x_i, F_i) \in \mathcal{R} \times Y$ vadinsime interpoliaciniais taškais. Sakysime, kad *funkcija f interpoliuoja duomenis*, jeigu jos grafikui priklauso interpoliaciniai taškai.

Tarkime, kad IAS, apibrėžta transformacijomis $\{\omega_n, n = 1, \ldots, N\}$. Sakysime kad minėtoji IAS susieta su (1') A.D.A., jeigu IAS-os atraktoriui priklauso (1') aibės taškai.

Pažymėkime $X = \mathcal{R} \times Y$ ir $\theta > 0$. Apibrėžkime metriką aibėje X tokiu būdu:

$$\rho(X_1, X_2) = |x_1 - x_2| + \theta \rho_y(y_1, y_2), \tag{10}$$

čia $X_1 = (x_1, y_1),\ X_2 = (x_2, y_2) \in X \times Y$. Tuomet (X, ρ) pilna metrinė erdvė.

Apibrėžkime transformaciją $L_n : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$

$$L_n(x) = a_n x + e_n,\ a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_0},\ e_n = \frac{x_N x_{n-1} - x_0 x_n}{x_N - x_0}, \tag{11}$$

ir pareikalaukime, kad $L_n\big([x_0, x_N] = [x_{n-1}, x_n]\big)$. Ši funkcija yra spaudžiantis homeomorfizmas. Tarkime, kad $c, s \in \mathcal{R}, 0 \le s < 1,\ c > 0$. Tegu $M_n : X \longrightarrow Y,\ n \in \{1, \ldots, N\}$ ir be to

$$\rho\big(M_n(a, y), M_n(b, y)\big) \le c|a - b|,\quad a, b \in \mathcal{R}. \tag{12}$$

ir

$$\rho\big(M_n(x, a), M_n(x, b)\big) \le s\rho_y(a, b),\quad a, b \in G. \tag{13}$$

Apibrėžkime transformaciją $\omega_n : X \longrightarrow X$ tokiu būdu:

$$\omega_n = \big(L_n(x), M_n(x, y)\big),\ (x, y) \in X \times Y,\ n = 1, \ldots, N.$$

9.5 Teorema *Tegu IAS apibrėžta taip: $\{X; \omega_n, n = 1, \ldots, N\}$ ir $N > 1$. Be to tarkime, kad egzistuoja c ir s tokie, kad sąlygos (12) (13) būtų išpildytos. Tarkime, kad konstanta θ apibrėžianti metriką (10) yra tokia:*

$$\theta = \frac{1 - a}{2c},\ a = \max(a_i,\ i = 1, \ldots, N).$$

Tuomet ši IAS yra spaudžianti, metrikos ρ atžvilgiu.

Pastebėsime, kad paskutinioji teorema yra 9.4 teoremos apibendrinimas.

Tam, kad teoremoje apibrėžtos IAS atraktoriui priklausytų A.D.A. taškai, turi būti išpildytos tokios, kraštinės, sąlygos:

$$M_n(x_0, F_0) = F_{n-1},\ M_n(x_N, F_N) = F_n,\ n = 1, \ldots, N. \tag{14}$$

Arba

$$\omega_n(x_0, F_0) = (x_{n-1}, F_{n-1}),\ \omega_n(x_N, F_N) = (x_n, F_n),\ \ n = 1, \ldots, N.$$

9.6 Teorema *Laikykime, kad duota IAS kaip ir 9.5 teoremoje. Be to tarkime, kad ši IAS susieta su (1') A.D.A. $\{(x_i, F_i) \in X\}$. Laikykime, kad egzistuoja jau minėtos konstantos c, s, su kuriomis sąryšiai (12)-(13) galioja. Be to tarkime, kad $G \in H(X)$, ir G yra šios IAS atraktorius. Tuomet egzistuoja tolydi funkcija*

$$f : [x_0, x_N] \longrightarrow Y,$$

kurios grafikui priklauso taškai $\{(x_i, F_i); i = 1, \ldots, N\}$. T.y.

$$G = \{(x, f(x)); x \in [x_0, x_N]\},\ f(x_i) = F_i,\ i = 0, \ldots, N.$$

Funkciją, kurios grafikas yra 9.6 teoremos formuluotėje minimos IAS atraktorius, vadinsime *apibendrinta fraktaline interpoliacine funkcija, atitinkančia A.D.A.*.

Aptarsime metodą, kaip turint apibendrintą fraktalinę interpoliacinę funkciją galima atstatyti interpoliacinę funkciją naudojant afinines transformacijas, apibrėžtas erdvėje $\mathcal{R}^3$. T.y. šių transformacijų grafikus projektuosime į plokštumą.

Sakykime, kad $N > 1$, ir duota (1) D.A.. Apibrėžkime parametrų aibę

$$\{H_i;\ i = 0, \ldots, N\}.$$

Kartu su šia parametrų aibe nagrinėkime (1') A.D.A. ir apibrėžkime

$$\{(x_i, F_i, H_i) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}^2; i = 0, \ldots, N\}.$$

Tarkime, kad paskutiniose 9.5, 9.6 teoremose naudojama metrinė erdvė

$$(Y, \rho_y) = (\mathcal{R}^2, \rho_2).$$

Apibrėžkime IAS $\{(\mathcal{R}^3; \omega_n,\ n = 1, \ldots, N\}$ tokiu būdu

$$\omega_n(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ c_n & d_n & h_n \\ k_n & l_n & m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \\ g_n \end{pmatrix},$$

Čia visos konstantos realios. Be to pareikalaukime, kad

$$\omega_n(x_0, F_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ F_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},\ \ \omega_n(x_N, F_N, y_N) = \begin{pmatrix} x_n \\ F_n \\ y_n \end{pmatrix},\ \ n = 1, \ldots, N.$$

Apibrėžkime transformacijų aibę tokiu būdu:

$$\omega_n(x, y, z) = (L_n, M_n(x, y, z))$$

ir transformacija L_n apibrėžta (11) lygybe, o $M_n : \mathcal{R}^3 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ formule

$$M_n(x, y, z) = A_n \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_n + c_n x \\ g_n + k_n x \end{pmatrix},$$

čia

$$A_n = \begin{pmatrix} d_n & h_n \\ l_n & m_n \end{pmatrix}, n = 1, \ldots, N. \tag{15}$$

Pakeiskime F_n sąlygoje (14) dydžiu (F_n, H_n). Tuomet M_n išpildo sąlygą (14). Apibrėžkime

$$c = \max\{\max(c_i, k_i);\ i = 1, \ldots, N\}.$$

Tuomet (12) sąlyga taip pat išpildyta. Ir pagaliau tarkime, kad tiesinė transformacija $A_n : \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathcal{R}^2$ yra spaudžianti, kurios s.k. $0 \leq s \leq 1$. Tuomet ir (13) salyga taip pat išpildyta. Vadinasi, taip apibrėžta IAS išpildo 9.6 teoremos sąlygos. Todėl IAS atraktorius yra tolydžios funkcija $f : [x_0, x_N] \longrightarrow \mathcal{R}^2$ grafikas toks, kad

$$f(x_i) = (F_i, H_i),\ i = 1, \ldots, N,$$

o pati funkcija $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.

Tuomet $f_1 : [x_0, x_N] \longrightarrow \mathcal{R}$ yra tolydi funkcija ir $f_1(x_i) = F_i,\ i = 1, \ldots, N$. Pastarąją funkciją f_1 vadinsime paslėptojo kintamojo fraktaline interpoliacine funkcija, kuri susijusi su D.A. $\{(x_i, F_i) \in \mathcal{R}^2; i = 1 \ldots N\}$.

Parodysime, kad naudodami afinines trasformacijas su paslėptuoju kintamuoju mes galime konstruoti bet kokio laipsnio polinomų grafikus. Turėjome, kad

$$\big(Tf)\big)(x) = M_n\big(L_n^{-1}(x), f(L_n^{-1}(x))\big).$$

Tuomet IAS atraktorius nusakomas lygtimi

$$f(x) = M_n\big(L_n^{-1}(x), f(L_n^{-1}(x))\big)$$

ir tegu $f(x) = (y(x), z(x))$. Pastebėsime, kad mums pakanka suskaičiuoti pirmąją komponentę, nes antrąją gausime manipuliuodami lygtimis. Turėjome $L_n(x) = a_n x + e_n$ ir

$$M_n(x, y, z,) = A_n \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_n x + f_n \\ k_n x + g_n \end{pmatrix}, \; A_n = \begin{pmatrix} d_n & h_n \\ l_n & m_n \end{pmatrix},$$

kai $n = 1, \ldots, N$. Tada iš auksčiau turėtų sąryšių išplaukia, kad

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} y(L_n^{-1}) \\ z(L_n^{-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_n L_n^{-1}(x) + f_n \\ k_n L_n^{-1}(x) + g_n \end{pmatrix}.$$

Iš paskutiniųjų lygčių, išreiškę $y(x)$ gauname

$$y(x) = d_n y(L_n^{-1}(x)) + h_n z(L_n^{-1}(x)) + c_n L_n^{-1}(x) + f_n. \tag{12}$$

Yra žinoma, kad norint rasti $N-$os eilės polinomą, reikia žinoti $N+1$ tašką, kurie priklauso šiam polinomui. Tarkime, kad mes žinome šiuos taškus. Įrašę į paskutiniąją lygtį gauname, kad

$$y(x) = \alpha_N x^N + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \ldots + \alpha_0.$$

Kadangi L_n tiesinis, tai L_n^{-1} taip pat tiesinis. Vadinasi ir $y(L_n^{-1})$ laipsnis taip pat N. Todėl

$$y(L_n^{-1}(x)) = \beta_{nN} x^N + \beta_{nN-1} x^{N-1} + \ldots + \beta_{n0}.$$

Iš dviejų paskutiniųjų saryšių, bei lygybės (12) gauname

$$\alpha_N x^N + \alpha_{N-1} x^{N-1} + \ldots + \alpha_0 = d_n y(L_n^{-1}(x)) + h_n z(L_n^{-1}(x)) + c_n L_n^{-1}(x) + f_n =$$

$$d_n \beta_{nN} x^N + \ldots + d_n \beta_{n0} + h_n(L_n^{-1}(x) + c_n L_n^{-1}(x).$$

Kaip ir paslėptojo kintamojo atveju, koeficientą d_n galime pasirinkti laisvai. Tarkime, kad

$$d_n = \frac{\alpha_N}{\beta_N}.$$

Matome kad paskutiniojo reiškinio kairė pusė yra $N-1-$ ojo laipsnio polinomas, todėl galime parinkti h_n. Taigi

$$z(x) = \gamma_{N-1} x^{N-1} + \ldots + \gamma_0,$$

bei

$$\delta_{n-1} x^{N-1} + \ldots + \delta_{n0} = z(L_n^{-1}(x)), \text{ tad } h_n \delta_{ni} = \alpha_i - d_n \beta_{ni},$$

kai $i \geq 2$ ir

$$h_n \delta_{n1} x + h_n \delta_{n0} + c_n L_n^{-1}(x) + f_n = (\alpha_1 - d_n \beta_{n1} x) + (\alpha_0 - d_n \beta_{n0}).$$

Koeficientus randame, sulyginę reiškinius prie atitinkamų x laipsnių. Tokiu būdu nustatėme paslėptojo kintamojo fraktalinę interpoliacinę funkciją.

9.4 Plokščios srities "užpildymas" kreive.

Prieš pradėdami nagrinėti šiame skyrelyje numatytus klausimus, prisiminkime keletą nesudėtingų bet labai įdomių rezultatų. Skaitytojas išklausęs mat. analizės kursą žino, kad natūraliųjų skaičių aibė yra ekvivalenti racionaliųjų skaičių aibei, bet nėra ekvivalenti realiųjų skaičių aibei. Toliau, bet koks atviras, realiųjų skaičių intervalas yra ekvivalentus realiųjų skaičių aibei. Bijekciją, apibrėžiančią šį ekvivalentumo sąryšį, galime nurodyti be galo daug būdų, pavyzdžiui funkcija

$$y = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}x)$$

intervalą $(0,1)$, abipus vienareikšmiškai atvaizduoja į realiųjų skaičių aibę. Manome, kad skaitytojas galėtų pasiūlyti ne vieną tokią bijekciją. Nors pateiktasis ekvivalentumo sąryšis gana įtikinantis, vis tik "sveikos nuovokos" srityje tai ne taip jau ir akivaizdu, juk baigtinio ilgio intervalą "sutapatiname", tam tikra prasme, su begalinio ilgio intervalu! Tačiau tai dar ne viskas, pasirodo galima nurodyti abipus vienareikšmę atitiktį tarp baigtinio intervalo ir kvadrato taškų. Atlikime tai. Nagrinėkime intervalą $I = [0,1]$ ir kvadratą $K = [0,1] \times []0,1]$. Žinoma, kad bet kokį realųjį skaičių galime užrašyti begaline dešimtaine trupmena

$$x = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots, \quad a_i \in \{0,1,\ldots,9\}.$$

Jeigu skaičius yra baigtinė dešimtainė trupmena, tai šį skaičių keisime jam lygia, begaline dešimtaine trupmena, pavyzdžiui,

$$x = 0,5 = 0,49999\ldots.$$

Tarkime, kad $(x,y) \in K$. Tada $x = 0, a_1a_2a_3\ldots, \quad y = 0, b_1b_2b_3\ldots$. Šiam kvadrato taškui priskirkime aibės $I = [0,1]$ skaičių tokiu būdu:

$$(x,y) = 0, a_1b_1b_2a_2a_3b_3b_4a_4a_5\ldots.$$

Aišku, kad skirtingiems kvadrato taškams priskirsime skirtingus intervalo taškus. Bet ar šis priskyrimas yra siurjekcija? Siūlome tuo įsitikinti pačiam skaitytojui. Išties sunkiai "sveiku protu" suvokiamas rezultatas-kvadrato kraštinėje ir pačiame kvadrate "toks pat" elementų skaičius

Nesunku suprasti, kad tarp kvadrato vidaus taškų ir erdvės $\mathcal{R}^2$ egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis. Tokią atitiktį galime apibrėžti taip:

$$(\mathrm{tg}(x\frac{\pi}{2}), \mathrm{tg}(y\frac{\pi}{2})) \to (u,v),$$

$(u,v) \in \mathcal{R}^2, \quad (x,y) \in K^\circ$.

Kadangi ekvivalentumo sąryšis yra tranzityvus, tai gauname, kad I° yra ekvivalentus aibei $\mathcal{R}^2$.

Panagrinėkime dar vieną nepaprastai įdomų rezultatą. *Egzistuoja tolydi kreivė, kuriai priklauso visi kvadrato taškai.* Aptarsime šią galimybę.

Visų pirma atkreipsime dėmesį į tai, kad plokštumos kreivę galime laikyti kokios nors funkcijos grafiku, t.y. tarp kreivių ir funkcijų grafikų egzistuoja abipus vienareikšmiška atitiktis.

Tarkime, kad funkcija apibrėžta parametriniu būdu (kiekvieną funkciją galima užrašyti tokiu būdu):

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [a,b]. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad tada plokštumos kreivės taškus galime apibrėžti tokia aibe

$$\{(x(t), y(t)), \quad t \in [a,b].\}$$

Taigi, kiekvienai funkcijai, nurodėme plokštumos kreivę. Atvirkštinis sąryšis akivaizdus.

Prieš pradėdami nagrinėti suformuluotą užduotį, pateiksime keletą pastebėjimų. Visų pirma, intervalas I ir kvadratas K yra kompaktiškos aibės. Todėl visi šių aibių taškai yra ribiniai. Simboliu $\{K_n(x) \subset K, \; n \in$

$\mathcal{N}\}$ pažymėkime kvadratų seką, kuriai priklauso taškas x. Kadangi K kompaktiška aibė, tai egzistuoja aibė $\{n_k\} \subset \mathcal{N}$, kad $\lim\limits_{k\to\infty} K_{n_k}(x) = \{x\}$.

Pažymėkime $\{I_n(x)\} \subset I$, intervalų seką, kuriai priklauso taškas x. Analogiškai samprotaudami gauname, kad egzistuoja seka $\{n_k,\ k \in \mathcal{N}\}$, tokia, kad

$$\lim_{k\to\infty} I_{n_k}(x) = \{x\}.$$

Apibendrinkime tai. Iš aukščiau padarytos pastabos išplaukia, kad visus I ir visus K taškus galime reprezentuoti intervalų arba kvadratų, atitinkamai, sekomis. Žinome, kad bijekcija tarp intervalo ir kvadrato egzistuoja, taigi, tereikia mokėti šią atitiktį nustatyti tarp atitinkamų, nagrinėjamų sekų, elementų. Realizuodami šį priskyrimą kvadrato taškams, gausime ieškomąją kreivę. Truputį detaliau apie Hilberto pateiktą kvadratą užpildančios kreivės grafiką.

Padalinkime intervalą I į keturias lygias dalis- $I_1^1, I_2^1, I_3^1, I_4^1$, pav.

Tada šį skaidinį atitinkantis kvadrato skaidinys yra $K_1^1, K_2^1, K_3^1, K_4^1$, pav.

Padalinę kiekvieną intervalą $I_k^1,\ k = 1,2,3,4$ į keturias lygias dalis gauname šešiolika intervalų $I_k^2,\ k = 1,2,\ldots,16$, pav.

Tada šį skaidinį atitinkantis kvadratų skaidinys yra $K_k^2,\ k = 1,2,\ldots 16$, pav.. Ir taip toliau. Kurį intervalo skaidinio elementą priskirti kuriam kvadrato skaidinio elementui, nurodysime kreive.

Pav pateikiama Hilberto pasiūlyta kreivių sekos, jungiančios kvadrato taškus, konstrukcija, kuri, kai k neaprėžtai auga, konverguoja į kreivę, kuriai priklauso visi kvadrato taškai. Kreivė "judėdama" nurodo kvadratų seką, kuriems eilės tvarka yra priskiriami atitinkamo skaidinio intervalai.

Po trumpos apžvalgos formalizuokime "erdvės užpildymo kreive" problemą.

Tarkime, kad $A \subset \mathcal{R}^2$ yra netuščia, trajektorijomis susijusi, aibė. Sukonstruosime tolydžią funkciją $f : [0,1] \to \mathcal{R}^2$, kuri "užpildytų" aibę A, t.y. $f([0,1]) = A$.

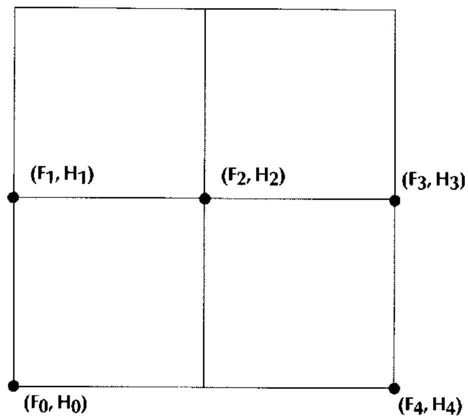
Atsakysime į šį klausimą, naudodami 9.6 teoremą. Aptarkime keletą papildomų žymėjimų. Laikysime, kad $Y = \mathcal{R}^2, o$ šioje erdvėje apibrėžta euklidinė metrika. Be to, tarkime, kad $A-$ yra kvadratas. Naudosime besišliejančią IAS $\{Y; \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, kurios dėka sukonstruosime laužčių seką, konverguojančią į šios IAS atraktorių. Šis atraktorius ir bus ieškomoji kreivė, kuri "užpildo" kvadratą.

Pažymėkime, $(F_0, H_0) = (0,0)$, $(F_1, H_1) = (0, 0.5)$, $(F_2, H_2) = (0.5, 0.5)$, $(F_3, H_3) = (1, 0.5)$, $(F_4, H_4) = (1, 0)$.

Tarkime, kad $\omega_i,\ i = 1,\ldots,4$ yra suspaudžiančios, su sąspūdžio koeficientu lygiu 0.5, panašumo transformacijos, apibrėžtos tokiu būdu:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}; \omega_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix};$$

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}. \tag{17}$$



9.1 pav.

Panašumo transformacijos parinktos taip, kad $\omega_n(F_0, H_0) = (F_{n-1}, H_{n-1})$ ir $\omega_n(F_4, H_4) = (F_n, H_n), n = 1, 2, 3, 4$.

Tegu $A_0 \subset H(A)$ yra kreivė, jungianti taškus (F_0, H_0) ir (F_4, H_4). Be to reikalaujame, kad

$$A_0 \cap \partial(A) = \{(F_0, H_0), (F_4, H_4)\}.$$

Paskutinioji sąlyga reiškia, kad visi kreivei priklausantys taškai yra vidiniai, išskyrus du paminėtus taškus. Tegu

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{4} \omega_n(B),\ B \in H(A).$$

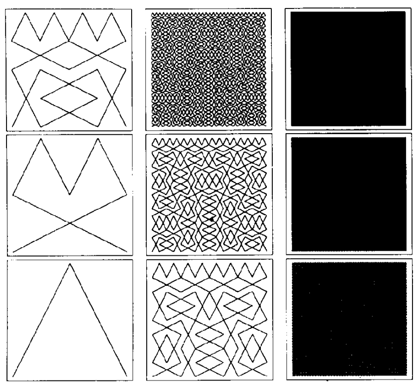
Apibrėžkime aibių seką $\{A_n\}$ tokiu būdu:

$$\{A_n = W^n(A_0),\ n = 1, \ldots\}.$$

Remdamiesi 4.10 teorema tvirtiname, kad paskutinioji seka konverguoja fraktalų erdvėje į nejudamą IAS tašką, kuris sutampa su aibe A. Tarkime, kad $\epsilon > 0$ mažas skaičius. Apibrėžkime kreivę, aibėje A tokiu būdu:

$$A_0 = (t, f(t)),\quad f(t) = \begin{cases} (2-\epsilon)t,\ 0 \le t \le 0.5 \\ (2-\epsilon)t + 1,\ \ 0.5 < t \le 1 \end{cases}.$$

Tada šios kreivės keletą iteracijų pateikiame pav..



9.2 pav.

Ervės "užpildymo" uždavinį spręskime kiek kitaip, t.y. naudodamiesi 9.3 skyrelio rezultatais. Kitaip tariant, funkciją $f : [0,1] = A$ konstruosime naudodamiesi "paslėpto" parametro interpoliacinę funkciją. Apibrėžkime IAS $\{\mathcal{R}^3; \omega_n, n = 1,2,3,4\}$ tokiu būdu:

$$\omega_n(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n-1}{4} \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix},$$

čia konstantos $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ apibrėžtos atitinkamomis (17) transformacijomis, kai

$$\omega_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_n \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Šią transformaciją atitinkanti duomenų aibė yra tokia

$$\{(0, F_0, H_0),\ (0.25, F_1, H_1); (0.5, F_2, H_2), (0.75, F_3, H_3), (1, F_4, H_4)\}.$$

Tada, remiantis 9.6 teorema gauname, kad šios funkcijos grafikas yra tolydi funkcija $f : [0,1] \to \mathcal{R}^2$, kuri bet to ir IAS atraktorius. Šios funkcijos reikšmių aibė

$$G_{yz} = \{(y,z) \in \mathcal{R}^2; = (x,y,z) \in G\},$$

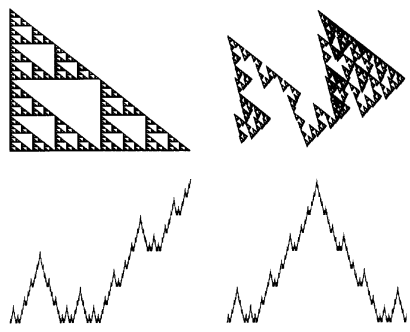
yra srities G projekcija (y,z) plokštumoje, be to ši aibė sutampa su aibe A. Kitaip tariant, sritis G_{yz} apibrėžia kvadratą A "užpildančią" kreivę. Antra vertus, trimatės IAS atraktorius, yra funkcija, apibrėžta intervale $[0,1]$ ir įgyjanti reikšmes aibėje A. Be to, aibės G_{xy} ir G_{xz} yra interpoliacinės funkcijos, su paslėptu kintamuoju, grafikai. Kitaip tariant, šios aibės, yra srities G projekcijos į plokštumas (x,y) ir (x,z), atitinkamai. Tuo pačiu mes turime galimybę "žvilgtelėti" į atraktorių iš skirtingų perspektyvų.

Tarkime, kad ST žymi Sierpinskio trikampį, kurio viršūnės taškuose $(0,0), (0,1), (1,0)$. Tada IAS $\{\mathcal{R}^3; \omega_i, i = 1,2,3\}$ apibrėžta tokiomis afininėmis transformacijomis:

$$\omega_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & b_n \\ 0 & c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{n-1}{4} \\ e_n \\ f_n \end{pmatrix},$$

$a_i = d_i = 0.5, b_i = c_i = 0$, ir $e_1 = f_1 = 0, e_2 = 0.5, f_2 = 0, e_3 = 0, f_3 = 0.5$.

Šios IAS atraktorius yra funkcija $f : [0,1] = ST \subset \mathcal{R}^2$. Žemiau yra pateiktos keturios šio atraktoriaus projekcijos.



9.3 pav.

1. Nurodykite IAS, kurios atraktorius yra kreivė, uždengianti kvadratą, trikampį.