II. FRAKTALŲ METRINĖ ERDVĖ.

2.1 Hausdorfo metrika.

Skaitytojui, kiek atidžiau nagrinėjusiam praeito skyriaus pavyzdžius, turėjo kilti klausimų, pavyzdžiui, ar nagrinėjamos sekos apskritai konverguoja ir jei taip, tai ar galime nurodyti aibę, kurioje "gyvena" fraktalinės struktūros? Šiame skyriuje nagrinėsime fraktalinių struktūrų, ateityje vadinamų tiesiog fraktalais, "egzistencijos vietą".

Sakykime, kad (E, ρ) pilna metrinė erdvė. Pažymėkime

$$H(E) = \big\{C \subset E, C \neq \emptyset, C - \text{kompaktiška aibė}\big\}.$$

Kitaip tariant $H(E)$ yra metrinės erdvės, netuščių, kompaktiškų aibių klasė.

2.1 Teorema *Jeigu $X, Y \in H(E)$, tai tada ir $X \cup Y \in H(E)$.*

$\ominus$

Tarkime, kad $X, Y \in H(E)$. Tuomet X, Y netušti, kompaktiški metrinės erdvės poaibiai. Tuomet ir $X \cup Y$ netučia aibė. Remdamiesi aibių X, Y kompaktiškumu gauname, kad egzistuoja baigtinės aibės N_1 ir N_2, kad

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in N_1} D_\alpha(X),\ Y \subset \bigcup_{\alpha \in N_2} D_\alpha(Y).$$

Tada aibė

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in N_1} D_\alpha(X)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{\alpha \in N_2} D_\alpha(Y)\Big)$$

yra aibės $X \cup Y$ baigtinis denginys. Tuomet aibė $X \cup Y$ yra kompaktiška, o kadangi ir netuščia, tai ji priklauso aibei $H(X)$.

$\oplus$

Pastebėsime, kad jeigu $X, Y \in H(X)$, tai nebūtinai $X \cap Y \in H(E)$. Pastarojo tvirtinimo teisingumas išplaukia iš to, kad dviejų kompaktiškų aibių sankirta gali būti tuščia. Bet tuščia aibė nepriklauso aibei $H(E)$.

Lema 2.1 (Vejerštraso teorema) *Tolydi kompaktiškoje aibėje funkcija įgyja savo didžiausią ir mažiausią reikšmes.*

Pastarojo teiginio įrodymą galima rasti, bet kokiame, matematinės analizės vadovėlyje.

Priminsime, kad atstumu tarp erdvės elemento $x \in E$ ir aibės $A \subset E$ laikome tokį skaičių

(1), $$d(x, A) = \inf(\rho(x, y); y \in A)$$

čia ρ yra erdvės E metrika.

Lema 2.2 *Atstumas, apibrėžtas* (1) *lygybe, yra tolydi aibėje E, jei aibė $A \neq \emptyset$.*

Pastarąjį teiginį siūlome įrodyti skaitytojui.

Tarkime, kad $B \in H(X)$. Kyla pagrįstas klausimas - ar ši apatinė riba yra pasiekiama? Kitaip tariant ar aibėje $H(E)$ atstumas d korektiškai apibrėžtas. Pažymėkime $f(y) = \rho(x, y)$, $P = P(x) = \inf\{f(y); y \in B, x \in E\}$. Matome, kad $f(y) \geq 0$. Sakykim, kad $y_0 \in B$ ir $\rho(x, y_0) = P$. Kadangi aibė B kompaktiška, tai egzistuoja realiųjų skaičių seka, $\{y_n; n \in \mathcal{N}\} \subset B$ tokia, kad $|f(y_n) - P| < 1/n$, visiems n. Bet kompaktiškos aibės elementų seka $\{y_n\}$ turi konverguojantį posekį $\{y_{n_k}\}$, kad $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 \in B$. Naudodamiesi tuo, kad $f(y)$ tolydi gauname, $f(y_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. Taigi, tikslus apatinis rėžis egzistuoja ir priklauso aibei B.

Sakykime, kad $A, B \subset H(E)$. Tada aibių funkciją

$$d(A, B) = \max\{\rho(x, B) : x \in A\},$$

vadinsime atstumu tarp aibių A ir B. Atkreipsime dėmesį į tai, kad pastaroji aibių funkcija nėra simetriška kintamųjų atžvilgiu, t.y. $d(A,B) \neq d(B,A)$. Jeigu $B \subset C$, tai $d(X,C) \leq d(X,B)$, bet kokiai aibei $X \subset H(E)$. Pažymėkime $a \wedge b = \min\{a,b\}$ ir $a \vee b = \max\{a,b\}$.

2.2 Teorema *Jeigu $A, B, C, \subset H(E)$, tai $d(A \cup B, C) = d(A,C) \vee d(B,C)$.*

$\ominus$

Turime, kad

$$d(A \cup B, C) = \max\{d(x,C) : x \in A \cup B\} =$$

$$\max\{d(x,C) : x \in A\} \vee \max\{d(x,C) : x \in B\}.$$

$\oplus$

Sakykime, kad $A, B \subset H(E)$. Aibių A ir B Hausdorfo atstumu vadinsime aibių funkciją $h : H(E) \times H(E) \longrightarrow \mathcal{R}$,

$$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A).$$

Parodysime, kad funkcija h yra erdvės $H(E)$ metrika. Tarkime $A, B, C \in H(E)$. Nesunku matyti, kad $h(A,A) = d(A,A) \vee d(A,A) = d(A,A) = \max\{d(x,A); x \in A\} = 0$. Kadangi aibės A ir B yra kompaktiškos, tai egzistuoja taškai $a \in A$ ir $b \in B$ tokie, kad $h(A,B) = \rho(a,b)$. Vadinasi, $0 \leq h(A,B) < \infty$. Tarkime, kad $A \neq B$. Tada, egzistuoja $a \in A$, $a \notin B$. Vadinasi $h(A,B) \geq d(a,B) > 0$. Mums liko įrodyti trikampio nelygybę, t.y. $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$. Visų pirma įrodykime, kad $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$. Bet kokiam $a \in A$ teisinga nelygybė:

$$d(a,B) = \min\{\rho(a,b); b \in B\} \leq \min\{\rho(a,c) + \rho(c,b); b \in B\} = \rho(a,c) + \min\{\rho(c,b); b \in B\}, c \in C.$$

Taigi

$$d(a,B) \leq \max\{d(A,c); c \in C\} + \max\{\min(\rho(c,b); b \in B\}; c \in C\} = d(A,C) + d(C,B).$$

Tada $d(B,A) \leq d(A,C) + d(C,B)$.

Visiškai analogiškai vertindami gausime, kad

$d(B,A) \leq d(B,C) + d(C,A)$.

Iš paskutiniųjų dviejų nelygybių išplaukia, kad

$h(A,B) = d(A,B) \vee d(B,A) \leq d(B,C) \vee d(C,B) + d(A,C) \vee d(C,A) = h(B,C) + h(A,C)$.

Taigi, aibių funkcija $h : H(E) \times H(E) \longrightarrow \mathcal{R}$ yra metrika. Todėl pora $(H(E), h)$ yra metrinė erdvė, kurią vadinsime fraktalų metrine erdve.

2.3 Teorema *Tarkime, kad $A, B, C, D \in H(E)$. Tuomet teisinga nelygybė:*

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq h(A,C) \vee h(B,D).$$

$\ominus$

Naudodami Hausdorfo metrikos apibrėžimą, rašome

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(A \cup B, C \cup D) \vee d(C \cup D, A \cup B).$$

Jeigu

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(A \cup B, C \cup D),$$

tuomet arba

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(A, C \cup D), \text{ arba } h(A \cup B, C \cup D) = d(B, C \cup D).$$

Remdamiesi Hausdorfo metrikos savybėmis, gauname, kad

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(A, C) \leq h(A, C) \leq h(A, C) \vee h(B, D)$$

arba

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(B, D) \leq h(B, D) \leq h(A, C) \vee h(B, D).$$

Bet jeigu

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(C \cup D, A \cup B),$$

tai šiuo atveju

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(C, A \cup B)$$

arba

$$h(A \cup B, C \cup D) = d(D, A \cup B).$$

Dar kartą pasinaudoję Hausdorfo metrikos savybėmis gauname,

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(C, A) \leq h(A, C) \leq h(A, C) \vee h(B, D).$$

Toliau

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq d(D, B) \leq h(B, D) \leq h(A, C) \vee h(B, D).$$

Iš keturių paskutiniųjų nelygybių išplaukia teoremos įrodymas.

$\oplus$

Gal būt skaitytojui kilo klausimas- kokių priežaščių verčiami, kartu su jau apibrėžta metrine erdve, mes nagrinėjame iš šios erdvės kompaktiškų aibių sudarytą aibę, kurioje, apibrėžę Hausdorfo metriką, gauname metrinę erdvę? Dar daugiau, kodėl šią erdvę pavadiname fraktalų erdve?

Sugrįžkime prie jau nagrinėtų pavyzdžių, tarkime, Kantoro aibės. Iš intervalo $[0, 1]$ (kuri yra kompaktiška aibė metrinėje erdvėje $(\mathcal{R}, \rho_1)$) pirmąjame žingsnyje mes pašalinome atvirą aibę. Likusi aibė dviejų kompaktiškų aibių sąjunga, taigi ji kompaktiška (žr. 2.1 Teorema). Prisiminkime, kad kiti žingsniai visiškai analogiški. Kiekviename sekančiame žingsnyje "pasigaminame" vis daugiau kompaktiškų aibių, kitaip tariant tokiais savo veiksmais mes indukuojame kompaktiškų aibių seką ir šios sekos ribą pavadinome Kantoro aibe. Bet manome, kad ir skaitytojas suvokia, kad Kantoro aibė egzistuoja tik tuo atveju, kada minėtoji seka konverguoja, priešingu atveju tyrimo objektas nebūtų nusakytas. Beje, kaip jau ir anksčiau esame minėję, nagrinėtoji aibė turi fraktalinę struktūrą, todėl ir erdvę, kurioje tokios sekos "gyvena" natūralu vadinti fraktalų erdve.

Prieš pradėdami nagrinėti kitą skyrių, skaitytojui primygtinai siūlome atidžiai perskaityti pirmuosius skyrius.

2.2 Fraktalų erdvės pilnumas

Tarkim (X, ρ) metrinė erdvė, $(H(X), h)$ fraktalų metrinė erdvė su Hausdorfo metrika. Pastarąsias metrines erdves trumpumo dėlei žymėsime X ir H atitinkamai. Tarkime $S \subset X$. Tada aibės S aplinka, kurios diametras $\gamma \geq 0$, vadinsime aibę

$$S + \gamma = \{y \in X; \exists x \in S, \rho(x, y) \leq \gamma\}.$$

2.4 Teorema *Tarkime, kad $A, B \subset H(X)$ ir $\epsilon > 0$. Tada teisingas žemiau pateiktas teiginys:*

$$h(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon \ \text{ ir } \ B \subset A + \epsilon.$$

$\ominus$

Jeigu $h(A, B) \leq \epsilon$, tai tada $d(A, B) \leq \epsilon$ ir $d(B, A) \leq \epsilon$ ir atvirkščiai. Taigi, pakanka įrodyti tokį teiginį:

$$d(A, B) \leq \epsilon \Leftrightarrow A \subset B + \epsilon.$$

Turime, kad
$$d(A,B) = \max\{d(a,B); a \in A\} \le \epsilon.$$
Tada visiems $a \in A$, $d(a,B) \le \epsilon$. Iš pastarosios nelygybės išplaukia, kad jeigu $a \in A$, tai $a \in B + \epsilon$ ir tuo pačiu $A \subset B + \epsilon$.

Visai analogiškai įrodoma, kad
$$d(A,B) \le \epsilon \Leftrightarrow B \subset A + \epsilon.$$

Nagrinėkime skaičių
$$d(A,B) = \max\{d(a,B); a \in A\}.$$
Tarkime, kad $a \in A$. Jeigu $A \subset B + \epsilon$, tai $a \in B$. Tada $\rho(a,b) = d(\{a\},\{b\}) \le \epsilon$, visiems $a \in A$. Darome išvadą, kad $d(a,B) \le \epsilon$, visiems $a \in A$. Taigi, $d(A,B) \le \epsilon$.

Analogiškai samprotaudami galime parodyti, kad ir $d(B,A) \le \epsilon$. Tikimės, kad tai su malonumu atliks skaitytojas.

$\oplus$

Sakykime, kad $\{A_n, n \in \mathcal{N}\} \subset H(X)$. Be to tarkime, kad visiems $\epsilon > 0$, galime nurodyti $n_0 \in \mathcal{N}$, kad kai $m, n > n_0$, tai:
$$A_n \subset A_m + \epsilon \;\text{ ir }\; A_m \subset A_n + \epsilon$$
arba trumpai $h(A_n, A_m) \le \epsilon$.

Tokią fraktalinės erdvės elementų seką vadinsime Koši seka. Matome, kad naudojant Hausdorfo metriką, šios erdvės elementų Koši seką apibrėžiame analogiškai, kaip ir bet kurioje kitoje metrinėje erdvėje.

2.5 (Išplėtimo) Lemma. *Sakykime, kad $\{A_n; n \in \mathcal{N}\}$ - fraktalų erdvės H elementų Koši seka. Be to, tegu $\{n_k\} \subset \{n\}$ koks nors posekis ir aibė $\{x_{n_k} \in A_{n_k}\}$ kokia nors Koši seka, bet jau metrinėje erdvėje X. Tuomet egzistuoja Koši seka*
$$\{y_n \in A_n \subset X\}$$
tokia, kad $y_{n_j} = x_{n_j}, j \in \mathcal{N}$.

Trumpai pakomentuosime šią lemą. Šioje lemoje teigiama, kad jeigu duota fraktalų Koši seka erdvėje H, tai laisvai pasirinktai Koši sekai metrinėje erdvėje X, su sąlyga, kad tos sekos nariai priklauso fraktalų erdvės elementams $\{A_{n_j}\}$, mes galime nurodyti erdvės elementų, priklausančių fraktalų sekos elementams, Koši seką tokią, kad pasirinktoji Koši seka $\{x_{n_j}\}$ tampa "platesnės" Koši sekos posekiu.

$\ominus$

Sakykime, kad $\{x_{n_k}\}$ kokia nors Koši seka. Bet kokiam $n \in \{1, \ldots, n_1\}$ parinkime
$$y_n \in \{x \in A_n, \rho(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}.$$
Kitaip tariant, y_n yra artimiausias aibės A_n elementas iki x_{n_1}. Kadangi aibė A_n kompaktiška, tuo pačiu ir uždara, tai toks parinkimas įmanomas todėl, kad toks taškas $x \in A_n$ kuris yra arčiausiai x_{n_1}, egzistuoja. Sekančiame žingsnyje seką konstruojame taip: tegu $n \in \{n_1 + 1, \ldots, n_2\}$. Tada sekantį sekos narį renkame taip: $y_n \in \{x \in A_n, \rho(x, x_{n_2}) = d(x_{n_2}, A_n)\}$, ir taip toliau, visiems $j \in \{3, \ldots\}$ ir $n \in \{n_j + 1, \ldots, n_{j+1}\}$ parenkame seką tokiu būdu
$$y_n \in \{x \in A_n; \rho(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}.$$

Dabar parodysime, kad sukonstruotoji seka $\{y_n\}$ yra sekos $\{x_{n_j}\}$ plėtinys. Visų pirma pastebėkime, kad $y_{n_j} = x_{n_j}$ ir $x_n \in A_n$. Tegu $\epsilon > 0$, bet koks fiksuotas skaičius. Tuomet egzistuoja $N_1 \in \mathcal{N}$ toks, kad jei $n_k, n_j \ge N_1$ tai $\rho(x_{n_k}, x_{n_j}) \le \epsilon/3$. Antra vertus $\{A_n\} \subset H$, todėl egzistuoja N_2 toks, kad visiems $m, n > N_2$ teisinga nelygybė: $d(A_m, A_n) = \epsilon/3$. Tarkime, kad $N = \max(N_1, N_2)$ ir $n, m \ge N$. Tada
$$\rho(y_n, y_m) \le \rho(y_m, x_{n_j}) + \rho(x_{n_j}, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, y_n),$$

čia $m \in \{n_{j-1}+1, n_{j-1}+2, \dots, n_j\}$ ir $n \in \{n_{k-1}+1, \dots, n_k\}$. Kadangi $h(A_m, A_{n_j}) < \epsilon/3$ tai galime nurodyti taškus $y \in A_m \cup \big\{\{x_{n_j}\} + \epsilon/3\}\big\}$, kad $\rho(y_m, x_{n_j}) \leq \epsilon/3$. Analogiškai samprotaudami gauname, kad $\rho(x_{n_k}, y_n) \leq \epsilon/3$. Tuomet visiems $m, n \in \mathcal{N}$, $\rho(y_n, y_m) \leq \epsilon$. Taigi, sukonstruotoji seka yra Koši seka metrinėje erdvėje X, o šios sekos kiekvienas narys paimtas iš fraktalų erdvės H elemento.

$\oplus$

Sekančiame teiginyje įrodysime, kad fraktalų erdvėje bet kokia Koši seka turi ribą, priklausančią šiai erdvei. Taigi, fraktalų erdvė pilna.

2.6 Teorema *Sakykime, kad X yra pilna metrinė erdvė. Tada H irgi pilna metrinė erdvė, t.y., jei $\{A_n \in H, n \in \mathcal{N}\}$ konverguoja, tai $A = \lim_{n\to\infty} A_n \in H$. Be to ribinė aibė charakterizuojama tokiais aibės X elementais:* $A = \{x \in X; \text{egzistuoja erdvės } X \text{ elementų Koši seka tokia, kad } \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$.

$\ominus$

Vadinasi fraktalo A elementai yra metrinės erdvės elementų, tam tikrų sekų, ribos.

Šio teiginio įrodymą išskaidysime į keletą atskirų dalių. Kaip ir anksčiau, $\{A_n, n \in \mathcal{N}\}$ fraktalų erdvės Koši seka, o A, teoremos formuluotėje, nurodyta aibė.

a) Parodysime, kad $A \neq \emptyset$;

b) A uždara (tada ji pilna, nes X pilna);

c) laisvai pasirinktam $\epsilon > 0$, egzistuoja $N \in \mathcal{N}$, kad visiems $n \geq N, A \subset A_n + \epsilon$;

d) A yra visiškai aprėžta (kadangi pilna, tai ir kompaktiška);

e) $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

$\ominus$

a) *įrodymas*. Tarkime, kad duota Koši seka fraktalų erdvėje $\{A_n\}$. Sukonstruosime kitą Koši seką, bet jau metrinėje erdvėje X, $\{a_i \in A_i, i \in \mathcal{N}\}$. Tegu N_i kokia nors didėjanti natūraliųjų skaičių seka ir tokia, kad

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i},$$

kai $n, m > N_i$. Ši konstrukcija galima, kadangi seka $\{A_n\}$ Koši seka. Toliau, parinkime aibėje A_{N_1}, bet kokį elementą x_{N_1}.

Kadangi

$$h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$$

tai egzistuoja elementas $x_{N_2} \in A_{N_2}$, kad

$$\rho(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$$

(juk erdvė kompaktiška).

Tarkime, kad tokiu būdu jau parinkome elementus $x_{N_i} \in A_{N_i}, i = 1, \dots, k$ kuriems teisingos nelygybės:

$$\rho(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) \leq \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Kadangi

$$h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$$

ir $x_{N_k} \in A_{N_k}$, tai mes galime nurodyti elementą $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ tokį, kad

$$\rho(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Naudomi matematinės indukcijos metodą gauname, kad egzistuoja begalinė elementų seka $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$, turinti savybę:

$$\rho(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}.$$

Mums lieka atsakyti į tokį klausimą - ar sukonstruotoji seka yra Koši seka. Kad tuo įsitikintume, erdvėje X, bet kokiam $\epsilon > 0$ parinkime N_ϵ taip, kad

$$\sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon.$$

Aišku, kad tuomet kai $m > n > N_\epsilon$, tai

$$\rho(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq \rho(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + \ldots + \rho(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < \sum_{i=N_\epsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \epsilon.$$

Naudodamiesi išplėtimo lema gauname, kad egzistuoja posekis $\{a_i \in A_i\}$ toks, kad $\{a_{N_i} = x_{N_i}\}$. Bet riba $\lim\limits_{n\to\infty} A_i$ egzistuoja ir pagal apibrėžimą lygi A. Taigi $A \neq \emptyset$.

b) *įrodymas.* Mums reikia parodyti, kad visi ribiniai taškai priklauso šiai aibei. Tarkime, kad seka $\{a_i, a_i \in A_i\}$ konverguoja, o jos riba lygi a. Mums pakanka parodyti, kad $a \in A$. Sudarykime tokią sekų sistemą $x_{i,n} \in A_n$ ir $\lim\limits_{n\to\infty} x_{i,n} = a_i$, kur a_i yra aukščiau apibrėžtos konverguojančios sekos elementai. Toks parinkimas įmanomas dėl to, kad aibės A_n yra kompaktiškos, taigi ir uždaros, vadinasi visi šios aibės taškai - ribiniai. Dėl jau minėtų priežaščių seka $\{a_i\}$ konverguoja, todėl galime nurodyti natūraliųjų skaičių seką $\{N_i, i \in \mathcal{N}\}$ tokią, kad $\rho(a_{N_i}, a) < 1/i$. Dar daugiau, egzistuoja posekis $\{m_i\}$ toks, kad $\rho(x_{N_i,m_i}, a_{N_i}) \leq 1/i$. Naudodamiesi trikampio nelygybe, gauname

$$\rho(x_{N_i,m_i}, a) \leq \frac{2}{i}.$$

Pažymėję $y_{m_i} = x_{N_i,m_i}$ turime, kad $y_{m_i} \in A_{m_i}$ ir be to $\lim\limits_{i\to\infty} y_{m_i} = a$. Išplėtimo lemos dėka, seka $\{y_{m_i}\}$ gali būti papildyta iki sekos $\{z_i \in A_i\}$. Tuo būdu $a \in A$. Kadangi pradinė seka buvo pasirinkta laisvai, tai gauname, kad aibė A yra uždara.

c) *įrodymas.* Sakykime, kad $\epsilon > 0$. Jei $m, n \geq N$ tai teisingas sąryšis: $h(A_n, A_m) \leq \epsilon$, nes seka $\{A_n\}$ Koši seka. Tuomet jei $m \geq n$, tai $A_m \subset A_n + \epsilon$. Parodysime, kad $A \subset A_n + \epsilon$. Lai $a \in A$ ir seka $\{a_i \in A_i\}$ turi ribą lygią a. Jeigu N pakankamai didelis, tuomet visiems $m \geq N$ teisinga nelygybė: $\rho(a_m, a) < \epsilon$. Bet tai reiškia, kad $a_m \in A_n + \epsilon$, kai $A_m \subset A_n + \epsilon$. Kadangi A_n kompaktiška, tai $A_n + \epsilon$ uždara. Tuomet $a_m \in A_n + \epsilon$ visiems $m \geq N$, taigi ir ribinis taškas a priklauso aibei $A_n + \epsilon$. Kadangi skaičius a yra bet koks, laisvai pasirinktas aibės A taškas, tai gauname, kad $A \subset A_n + \epsilon$.

d) *įrodymas.* Tarkime priešingai, t.y. aibė A nėra visiškai aprėžta. Vadinasi egzistuoja $\epsilon > 0$, kad $\epsilon-$ tinklo sudaryti negalime. Dėl šios priežasties, egzistuoja seka $\{x_i, x_i \in A\}$ tokia, kad visiems $\rho(x_i, x_j) \geq \epsilon$, kai $i \neq j$. Bet tuomet, kai n pakankamai didelis, iš paskutiniosios nelygybės ir dalyje c) įrodyto rezultato, gauname, kad $A \subset A_n + \epsilon/3$. Taigi, koks bebūtų x_i, galime nurodyti elementą $y_i \in A_n$ tokį, kad $\rho(x_i, y_i) \leq \epsilon/3$. Naudodamiesi aibės A_n kompaktiškumu, tvirtiname, kad egzistuoja, sekos $\{y_n\}$, konverguojantis posekis $\{y_{n_i}\}$. Tuomet galime nurodyti pakankamai didelį i_0, kuriuo pradedant šio posekio elementai kiek norimai arti viens kito, t.y. jei $i, j > i_0$, tai $\rho(y_{n_i}, y_{n_j}) < \epsilon$. Bet tada teisinga nelygybė:

$$\rho(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq \rho(x_{n_i}, y_{n_i}) + \rho(y_{n_i}, y_{n_j}) + \rho(y_{n_j}, x_{n_j}) < \epsilon.$$

Paskutinioji nelygybė prieštarauja pradiniam sekos parinkimui. Taigi, prielaida buvo klaidinga, vadinasi, aibė A yra visiškai aprėžta.

e) *įrodymas.* Iš paskutiniosios dalies išplaukia, kad aibė $A \in H$.

Parodysime, kad ši seka yra Koši seka, t.y., egzistuoja N, kad jei $n, m \geq N$ tai $h(A_m, A_n) \leq \epsilon/2$. Tuomet visiems $m, n \geq N$ galios sąryšis $A_m \subset A_n + \epsilon/2$.

Tarkime $n \geq N$. Parodykime, kad $A_n \subset A + \epsilon$. Sakykime, kad $y \in A_n$. Tuomet egzistuoja didėjantis natūraliųjų skaičių aibės posekis $\{N_i\}$ toks, kad visiems $n, m \geq N_j$ išpildytas sąryšis: $A_m \subset A_n + \epsilon/2^{j+1}$. Pastebėkime, kad $A_n \subset A_{N_1} + \epsilon/2$. Kadangi $y_n \in A_n$, tai egzistuoja $x_{N_1} \in A_{N_1}$ toks, kad $\rho(y, x_{n_1}) \leq \epsilon/2$. Ir vėl, kadangi $x_{N_1} \in A_{N_1}$, tai galime nurodyti tašką $x_{n_2} \in A_{N_2}$ tokį, kad $\rho(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \epsilon/2^2$. Panašiai elgdamiesi mes konstruojame seką, $x_{N_1}, \ldots, x_{N_k}, \ldots$, kad $x_{N_j} \in A_{N_j}$ ir $\rho(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \epsilon/2^{j+1}$. Bet kokiam fiksuotam j, naudodami baigtinį skaičių kartų trikampio nelygybę, gauname, kad

$$\rho(y, x_{N_j}) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Taigi, seka $\{x_{N_j}\}$ yra Koši seka. Naudodamiesi n parinkimu, matome, kad visuomet $A_{N_j} \subset A_n + \epsilon/2$. Seka $\{x_{N_j}\}$ konverguoja į kokį tai tai tašką x ir kadangi $A_n + \epsilon/2$ uždara, tai $x \in A_n + \epsilon/2$. Dar daugiau, $\rho(y, x_{N_j}) \leq \epsilon$, o tai reiškia, kad $\rho(y, x) \leq \epsilon$. Taigi kai tik $n \geq N$, tai $A_n \subset A + \epsilon$. Tai įrodo, kad $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$,. Taigi, seka $\{A_n\}$ Koši seka, o erdvė $H-$ pilna.

$\oplus$

2.7 Teorema *Sakykime, kad metrinė erdvė (X, ρ) yra kompaktiška. Tada ir erdvė $(H(X), h)$ taip pat kompaktiška.*

$\ominus$

Esame įrodę, kad jeigu X pilna, tai ir $H(X)$ taip pat pilna metrinė erdvė. Norint parodyti, kad $H(X)$ yra kompaktiška, pakanka parodyti jos visišką aprėžtumą. Pastebėsime, kad jei metrinė erdvė X yra kompaktiška, tai kiekvienam $\epsilon > 0$ egzistuoja $\epsilon-$ tinklas.

Tarkime, kad $\{y_1, \ldots, y_n\}$ koks nors aibės X $\epsilon-$ tinklas. Žinoma, aibės $\{y_1\}, \ldots, \{y_n\}$ yra $H(X)$ elementai. Sakykime, kad $A \in H(X)$. Tuomet

$$h(\{y_i\}, A) = d(y_i, A) \vee d(A, y_i).$$

Pastebėsime, kad šių vienataškių aibių skaičius baigtinis. Imkime šių aibių, kurių atstumas iki aibės A yra mažesnis už ϵ, sąjungą, kurią pažymėkime raide Y. Ši aibė egzistuoja, nes bet koks aibės A elementas iki kurio nors y_i nutolęs ne daugiau negu ϵ atstumu. Bet tada $d(a, Y) < \epsilon$, visiems $a \in A$. Vadinasi $H(Y, A) < \epsilon$. Taigi $H(X)$ aprėžta, o tuo pačiu ir kompaktiška.

$\oplus$

2.8 Teorema *Tarkime, kad $f : \mathcal{R} \longrightarrow H$. Tuomet jeigu $f(x) = \{x\}$, tai f yra tolydi funkcija aibėje $\mathcal{R}$.*

$\ominus$

Sakykime, kad $\{x_n\}$ kokia nors realiųjų skaičių seka, konverguojanti į tašką x. Tuomet visiems $\epsilon > 0$, egzistuoja $N \in \mathcal{N}$, kad jei $n > N$, tai $\rho(x, x_n) < \epsilon$. Naudodami funkcijos f apibrėžimą, gauname, kad $h(\{x_n\}, \{x\}) = \rho(x_n, x)$, kadangi aibę sudaro tik vienas elementas. Tad aibių seka $\{\{x_n\}\}$ konverguoja į aibę $\{x\}$ ir tuo pat metu, funkcija f yra tolydi taške x. Teoremos įrodymą gauname remdamiesi tolydumo apibrėžimu.

$\oplus$

2.9 Teorema *Funkcija $f_x : [0, 1] \longrightarrow H$ tokia, kad $f_x(a) = [x, x + a]$, kai $0 \leq a \leq 1$, yra tolydi.*

$\ominus$

Pastarąją teorema perfrazuokime taip: erdvėje H egzistuoja trajektorija, siejanti intervalą su jo galiniu tašku.

Sakykime, kad sekos $\{a_n\}$ riba yra skaičius a. Tuomet visiems $\epsilon > 0$ galime nurodyti natūralųjį skaičių N, kad visiems $n > N$ teisinga nelygybė: $\rho(a_n, a) < \epsilon$. Tada Hausdorfo atstumas erdvėje H tarp dviejų intervalų yra toks :

$$h([x, x + a_n], [x, x + a]) = d([x, x + a_n], [x, x + a]) \vee d([x, x + a], [x, x + a_n]) = \rho(a, a_n) < \epsilon.$$

Matome, kad kiekvienam $x \in \mathcal{R}$ funkcija tolydi.

$\oplus$

2.10 Teorema *Tarkime, kad A yra kompaktiškas realiųjų skaičių aibės poaibis. Tuomet funkcija $f_A : [0, b] \longrightarrow H$, apibrėžta sąryšiu $f_A(a) = \cup[x, x + a], x \in A$, yra tolydi.*

⊖

Tarkime, kad $b = 1$. Tuomet, bet kokiame taške a, funkcija tolydi. Tai išplaukia iš praeitos teoremos. Pastebėkime, kad jeigu $g : [0,b] \longrightarrow [0,1], g(x) = x/b$, tai g yra tolydi. f_A yra dviejų tolydžių funkcijų kompozicija, taigi, ši funkcija yra tolydi.

⊕

2.11 Teorema *Tarkime, kad A ir B yra dvi kompaktiškos realiųjų skaičių aibės (tuo pačiu ir H taškai). Tuomet egzistuoja trajektorija, aibėje H, jungianti šias dvi aibes.*

⊖

Sakykime, kad $a, b, c \in A$, kur $A \subset \mathcal{R}$. Tuomet, jeigu egzistuoja trajektorija jungianti taškus a ir b, bei kita trajektorija, jungianti taškus b ir c, tai tada galime nurodyti trajektoriją, jungiančią taškus a ir c. Sukonstruokime šią trajektoriją aibėje $H(\mathcal{R})$, kuri jungtų dvi kompaktiškas aibes A ir B. Šiam tikslui apibrėžkime funkciją

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,b] \longrightarrow \{f_A(x); 0 \leq x \leq b\}.$$

Iš anksčiau turėtų teoremų išplaukia, kad f tolydi. Tuomet ieškomoji trajektorija yra intervalas, jungiantis $H(\mathcal{R})$ elementą su bet kokiu tašku. Lygiai taip pat nusakoma trajektorija tarp intervalo bei H elemento. Iš 2.10 teoremos išplaukia, kad tarp bet kokio intervalo ir jo sienos taško egzistuoja trajektorija. Bet tuomet ir tarp dviejų intervalo galų egzistuoja juos jungianti trajektorija. Mes aptarėme visus galimus atvejus, todėl apibendrinant galime teigti, kad trajektorija iš A į B taip pat egzistuoja. Pateiksime algoritmą, minėtąjai trajektorijai sukonstruoti: visų pirma A trajektorija sujungiama su intervalu, po to šis intervalas su savo galiniu tašku (2.9 teorema), o iš 2.8 teoremos išplaukia, kad šis taškas (aibė) sujungiamas su realiu skaičiumi, o pastarasis su intervalu ir pagaliau intervalą sujungiame su aibe B.

⊕

2.1 pav.

Iš pastarosios teoremos išplaukia tokia išvada. Jeigu metrinė erdvė X yra jungi, tai ir fraktalų erdvė $H(X)$ taipogi jungi.

Kuri iš 2.1 pav. pateiktų aibių yra susijusi, o kuri ne?

Užduotys

1. Įrodykite, kad jei $A, B \subset H(X)$ ir $A \subset B$, tai visiems $x \in X$ galioja sąryšis

$$\rho(x, B) \leq \rho(x, A),$$

čia (X, ρ) metrinė erdvė.

2. Tarkime, kad $x = (1, 1) \in \mathcal{R}^2$, o B uždaras rutulys, kurio centras $(0.5, 0)$, o spindulys 0.5. Apskaičiuokite $\rho_2(x, B)$ metrinėje erdvėje $(\mathcal{R}^2, \rho_2)$.

3. Tą pačią užduotį (žr. 2.) atlikite metrinėje erdvėje $(\mathcal{R}^2, \rho_M)$.

4. Tarkime, kad (X, ρ) yra pilna metrinė erdvė, o $A, B \in H(X)$, be to $A \neq B$. Įrodykite, kad arba $\rho(A, B) \neq 0$ arba $\rho(B, A) \neq 0$. Parodykite, kad jei $A \subset B$, tai $\rho(A, B) = 0$.

5. Sierpinskio trikampis S yra kompaktiška aibė metrinėje erdvėje $(\mathcal{R}^2, \rho_2)$. Tada (S, ρ_2) yra kompaktiška metrinė erdvė. Nurodykite kokią nors Koši seką $\{A_n \in H(S)\}$, bei nurodykite šios sekos ribinę reikšmę.

6. Tarkime, kad $\mathbf{K}$ yra kvadratas. 1.3 pav. yra pateikta sekos, iš aibės $(H(\mathbf{K}))$, konverguojančios į paparčio lapo projekciją, keli nariai. Pasirinkite kokį nors tašką A. Nurodykite Koši seką $\{x_n \in A_n\}$, kuri konverguoja į tašką, priklausantį A.

7. Tarkime, kad (X, ρ) yra kompaktiška metrinė erdvė. Įrodykite, kad erdvė $(H(X), h)$ taip pat kompaktiška.