SŪDUVOS KRAŠTO GIMNAZIJŲ MATEMATIKOS OLIMPIADA

MARIJAMPOLĖS RYGIŠKIŲ JONO GIMNAZIJA

Marijampolė, 2022-04-28

1. Mokytojas Alvydas kartą mįslingai užsiminė, kad šių dienų mokslas turi metodų, kuriuos taikant galima surasti visas realiųjų skaičių x ir y, tenkinančių lygtį

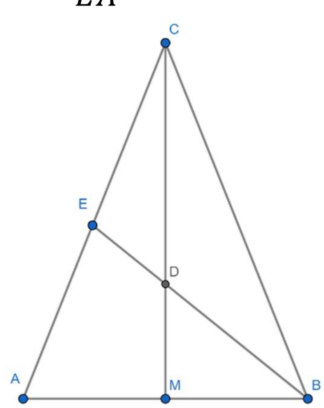
$$x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3},$$

poras. Tada visi jo mokiniai puolė tų porų ieškoti. Kokias poras jie vargais ne galais surado?

2. Pas mokytoją Daivą besimokančio pašvilpaujančio bernioko sesulė sesė geltonkasė kartą paklausė brolelio, ar įdomu yra mokytis visokių pirminių skaičių. Brolelis iš karto sumojo, kad dabar pasitaikė gera proga atsikratyti paskutinio mokytojo Daivos pasiūlyto uždavinio, kuris jam nebuvo iki galo aiškus, ir jis tuoj suaranžavo savo sesulei to paskutinio uždavinio su pirminiais skaičiais sąlygą. Ji išėjo tokia:
Sesulė sesė geltonkasė kartą pasirinko 8 skirtingus skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 9. Ji turi, panaudodama visus tuos skaitmenis po vieną kartą, sudaryti keturis dviženklius skaičius, kurie visi būtų pirminiai skaičiai ir po to visus tuos keturis pirminius dviženklius skaičius sudėti. Kokias sumas ji gali gauti ir kodėl tik tokias?

3. Marijampolėje, o taip pat ir visame Sūduvos krašte (ir ne tik jame) jau kuris laikas yra labai padidėjęs susidomėjimas skaičiumi 155. Todėl nenuostabu, kad toks visai ramus direktoriaus Vilhelmo susidomėjimas, ar yra (ir kiek yra) tokių natūraliųjų skaičių n ir m, kurių kvadratų skirtumas yra 155, sukėlė (gana) didelį mokslingosios jaunuomenės susidomėjimą. Tai kiek gi yra tokių natūraliųjų skaičių n ir m porų?

4. Trikampis ABC yra lygiašonis ($AC = BC$), o jo pagrindo AB vidurio taškas yra M. Atkarpoje CM yra pažymėtas toks taškas D, kad $\dfrac{CD}{DM} = \dfrac{3}{2}$. Tiesė BD kerta atkarpą AC taške E (žr. pav.). Nustatykite, kam yra lygus santykis $\dfrac{CE}{EA}$.



Sprendimai

1. Mokytojas Alvydas kartą mįslingai užsiminė, kad šių dienų mokslas turi metodų, kuriuos taikant galima surasti visas realiųjų skaičių x ir y, tenkinančių lygtį

$$x^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3},$$

poras. Tada visi jo mokiniai puolė tų porų ieškoti. Kokias poras jie vargais ne galais surado?
Sprendimas.
Egzistuoja viena vienintelė tokių skaičių x ir y pora $(x; y)$. Ją galima rasti kad ir tokiu būdu.
Padauginkime visą lygtį iš 6 ir sugrupuokime jos narius tokiu būdu:

$$12x^2 + 12y^2 - 12y + 6 - 12xy - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (12x^2 - 12xy + 3y^2) + (9y^2 - 12y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(2x-y)^2 + (3y-2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3},\ x = \frac{y}{2} = \frac{1}{3}.$$

Atsakymas.
$(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

2. Pas mokytoją Daivą besimokančio pašvilpaujančio bernioko sesulė sesė geltonkasė kartą paklausė brolelio, ar įdomu yra mokytis visokių pirminių skaičių. Brolelis iš karto sumojo, kad dabar pasitaikė gera proga atsikratyti paskutinio mokytojo Daivos pasiūlyto uždavinio, kuris jam nebuvo iki galo aiškus, ir jis tuoj suaranžavo savo sesulei to paskutinio uždavinio su pirminiais skaičiais sąlygą. Ji išėjo tokia:
Sesulė sesė geltonkasė kartą pasirinko 8 skirtingus skaitmenis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ir 9. Ji turi, panaudodama visus tuos skaitmenis po vieną kartą, sudaryti keturis dviženklius skaičius, kurie visi būtų pirminiai skaičiai ir po to visus tuos keturis pirminius dviženklius skaičius sudėti. Kokias sumas ji gali gauti ir kodėl tik tokias?
Sprendimas.
Panaudodama visus 8 skaitmenis po vieną kartą sesulė sesė geltonkasė vieną sykį surado keturis dviženklius skaičius 23, 41, 59 ir 67, o kitą kartą – jau visai kitokius: 23, 47, 59 ir 61.
Prieš imdama juos dėlioti ji pradėjo abstrakčiai samprotauti sakydama, kad joks dviženklis ar kitoks dar didesnis pirminis skaičius negali baigtis skaitmenimis 2, 4, 6, nes jis tuomet kaip lyginis skaičius dalintųsi iš 2 ir tikrai nebūtų pirminis. Lygiai taip joks dviženklis ar kitoks dar didesnis pirminis skaičius negali baigtis 5, nes tuomet jis dalintųsi iš 5 ir vėl negalėtų būti pirminis. Todėl tie minėtieji keturi skaitmenys 2, 4, 5 ir 6 turi būti keturių dviženklių pirminių skaičių dešimčių skaitmenys, o tada likę skaitmenys, arba 1, 3, 7 ir 9, turi būti tų keturių dviženklių pirminių skaičių vienetų skaitmenys. Todėl visai nesvarbu, kokius keturis dviženklius pirminius skaičius sesulė sesė geltonkasė sudarys (pora pavyzdžių jau pateikėme), bet jų suma visada bus lygi 10(2 + 4 + 5 + 6) + (1 + 3 + 7 + 9) = 170 + 20 = 190.
Atsakymas. 190.

3. Marijampolėje, o taip pat ir visame Sūduvos krašte (ir ne tik jame) jau kuris laikas yra labai padidėjęs susidomėjimas skaičiumi 155. Todėl nenuostabu, kad toks visai ramus direktoriaus Vilhelmo susidomėjimas, ar yra (ir kiek yra) tokių natūraliųjų skaičių n ir m, kurių kvadratų skirtumas yra 155, sukėlė (gana) didelį mokslingosios jaunuomenės susidomėjimą. Tai kiek gi yra tokių natūraliųjų skaičių n ir m porų?
Sprendimas.
Turime natūraliaisiais skaičiais išspręsti lygtį

$$n^2 - m^2 = 155\,.$$

Tą kvadratų skirtumą užrašę kaip skaičių sumos $n + m$ ir skirtumo $n - m$ sandaugą turėsime lygybę

$$(n - m)\,(n + m) = 155.$$

Dabar reikėtų pasižiūrėti į kokius du natūraliuosius daugiklius gali skaidytis skaičius 155, kuris yra dviejų pirminių skaičių 5 ir 31 sandauga. Nesunku matyti ir tai, jog iš lygybės $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m) = 155$ ir to, kad n ir m yra natūralieji skaičiai, išplaukia, jog ir $n + m$ yra natūralusis skaičius, todėl tada ir $n - m$ turi būti natūralusis skaičius, todėl būtinai $n > m$.
Pasinaudodami nelygybe $n - m < n + m$ dabar užrašome, jog

$$n^2 - m^2 = (n-m)(n+m) = 1\cdot 155 = 5\cdot 31$$

ir gauname dvi sistemas:

$$\begin{cases} n-m=1, \\ n+m=155 \end{cases} \quad \text{bei} \quad \begin{cases} n-m=5, \\ n+m=31. \end{cases}$$

Spręsdami pirmąją sistemą ir sudėję abi sistemos lygtis turime, kad

$$2n = 156$$

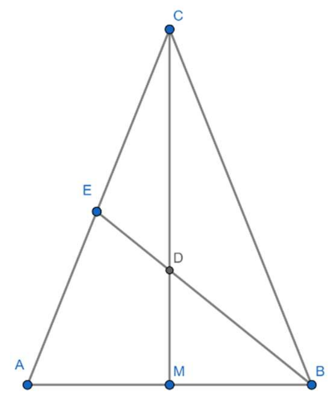
ir

$$n = 78 \quad \text{ir} \quad m = 77.$$

Spręsdami antrąją sistemą, atitinkamai gautume jog

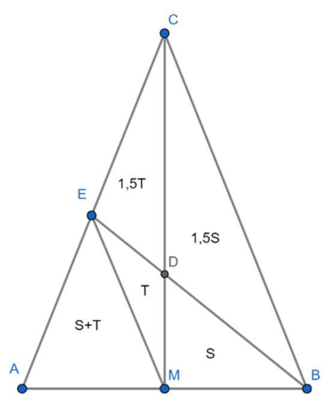
$$n = 18 \ \text{ir} \ \ m = 13.$$

Atsakymas.
Egzistuoja dvi tokios natūraliųjų skaičių m ir n poros $(n;\, m)$ – tai (78; 77) ir (18; 13).



4. Trikampis ABC yra lygiašonis ($AC = BC$), o jo pagrindo AB vidurio taškas yra M. Atkarpoje CM yra pažymėtas toks taškas D, kad $\dfrac{CD}{DM} = \dfrac{3}{2}$. Tiesė BD kerta atkarpą AC taške E. Nustatykite, kam yra lygus santykis $\dfrac{CE}{EA}$.

Sprendimas.



Lygiašonio trikampio pagrindo vidurio tašką M sujungiame su tašku E. Trikampiai MBD ir DBC turi tą pačią aukštinę, išvestą iš viršūnės B, todėl jų plotai sutinka taip pat, kaip ir tų trikampių pagrindų ilgiai MD ir DC, kurie sutinka, kaip pasakyta sąlygoje, kaip 2 : 3. Todėl jeigu trikampio MBD plotą pažymėsime S, tai trikampio DBC plotas bus lygus $1{,}5S$.
Panašiai trikampiai MED ir EDC turi tą pačią aukštinę, išvestą iš viršūnės E, todėl jų plotai sutinka taip pat kaip jų pagrindų ilgiai, kurie vėl yra MD ir DC, kitaip sakant, sutinka kaip 2 : 3. Todėl jeigu trikampio MED plotą pažymėsime simboliu T, tai trikampio EDC plotas bus lygus $1{,}5T$.
Lygiai taip pat trikampiai AEM ir EMB turi tą pačią aukštinę, išvestą iš viršūnės E, ir vienodo ilgio pagrindus AM ir MB, nes taškas M yra atkarpos AB vidurio taškas. Todėl tų trikampių plotai yra lygūs. Kadangi trikampio EMB plotas yra $S + T$, tai ir trikampio AEM plotas irgi yra lygus $S + T$.
Galiausiai ir trikampiai EBC ir ABE turi tą pačią aukštinę, išvestą iš viršūnės B, todėl ir jų plotai sutinka kaip jų pagrindų ilgiai, o tai ir yra ieškomasis santykis CE su EA. Tačiau trikampio EBC plotas yra lygus trikampio BDC ir trikampio EDC plotų sumai, o tai yra lygu $1{,}5S + 1{,}5T$, tuo tarpu trikampio ABE plotas yra lygus trikampio AME ir EMB plotų sumai, o tai yra lygu $(S + T) + (S + T) = 2S + 2T$. Todėl ieškomasis santykis CE su EA yra lygus santykiui $(1{,}5S + 1{,}5T):(2S + 2T) = 3:4$.
Atsakymas.
$\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{3}{4}$.