Atranka į 2022 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Pirmoji diena, 2022-04-29

1. Yra 4044 svareliai, kurių masės (gramais) yra $1, 2, 3, \ldots, 4044$. Agnė nori pasirinkti 2022 svarelius, kurių masių suma yra lyginis skaičius. Benas tvirtina: kad ir kokius svarelius pasirinktų Agnė, jis juos galės taip paskirstyti į dvi krūveles, kad abiejų krūvelių masės būtų lygios. (Krūvelėse svarelių nebūtinai turi būti po lygiai.) Ar Benas teisus?

2. Duotas trikampis ABC, kuriame $\angle BAC = 60^\circ$. Kraštinės AB tęsinyje už viršūnės B ir kraštinės AC tęsinyje už viršūnės C atitinkamai pažymėti tokie taškai D ir E, kad $BD = BC = CE$. Trikampio ACD apibrėžtinis apskritimas kerta atkarpą DE taške $P \neq D$. Įrodykite, kad atkarpa AP yra trikampio ADE pusiaukampinė.

3. Nustatykite visus realiuosius skaičius c, kuriems egzistuoja tokia funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kad
$$f(f(x) + f(y)) + cxy = f(x + y)$$
su visais realiaisiais x ir y.

Atranka į 2022 m. Pasaulinę ir Vidurio Europos matematikos olimpiadas

Antroji diena, 2022-04-30

4. Įrodykite, kad jei a, b ir c yra realieji teigiami skaičiai, tai
$$\frac{a^4b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4a^4}{c^3+a^3} \leqslant \frac{a^5+b^5+c^5}{2}.$$

5. Kiekvienam natūraliajam $n \geqslant 3$ nustatykite reiškinio
$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$
didžiausią galimą reikšmę, kai $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Nustatykite, ar egzistuoja tokie 2003 skaičiai
$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2003} \in \{1, 2, 3, \ldots, 4006\},$$
kad $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2003}$, o skaičius
$$2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + \ldots + 2^{a_{2003}} + 2^{4007}$$
dalijasi iš 2004.