LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

IV. SEKOS

(2021–2023)

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis

(Vilniaus universitetas)

Šioje jauniesiems matematikams skirtoje temoje kalbėsime tik apie begalines skaičių sekas, todėl jas vadinsime tiesiog sekomis.

Kiekvieną (begalinę) realiųjų skaičių seką galima apibūdinti kaip kurią nors funkciją *f*, apibrėžtą natūraliųjų skaičių aibėje $\mathbb{N}$. Šios funkcijos reikšmės $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... yra vadinamos atitinkamai *pirmu, antru, trečiu ir t. t. sekos nariu*. Reikšmė $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, vadinama *bendruoju sekos nariu*.

Paprastai skaičių sekos nariai žymimi kuria nors viena raide su indeksu, pavyzdžiui, x_n, y_n, a_n, b_n ir pan., o pačios sekos užrašomos vardijant jų narius:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots;$$

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots;$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots;$$

$$b_1, b_2, , b_3, \dots, b_n, \dots .$$

Gana dažnai sekos nusakomos glaustai - užrašant skliaustuose (...) bendrąjį narį: (x_n), (y_n), (a_n), (b_n).

Seka (x_n) vadinama *didėjančiąja seka*, jeigu $x_{n+1} > x_n$, kai $n = 1, 2, 3, \dots$. Ji vadinama *mažėjančiąja seka,* jeigu $x_{n+1} < x_n$, kai $n = 1, 2, 3, \dots$.

Seka (x_n) vadinama *monotonine seka*, jeigu ji yra arba didėjančioji seka, arba mažėjančioji seka. Kartais taip apibūdinta monotoninė seka vadinama *griežtai monotonine seka.*

Skaičius a vadinamas *sekos* (x_n) *riba*, jeigu skirtumo $x_n - a$ modulis $|x_n - a|$ neribotai didėjant n pasidaro kiek norima artimas nuliui; rašoma: $a = \lim x_n$.

Skaičiaus $|x_n - a|$ artumas nuliui nusakomas nelygybe $|x_n - a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (čia ε yra graikų abėcėlės raidė epsilon), o neribotas indekso n didėjimas $-$ nelygybe $n > E, E \in \mathbb{N}$.

Matematiškai tikslesnis sekos ribos apibrėžimas yra toks: skaičius a vadinamas sekos (x_n) riba, jeigu kiekvienam (kiek norimai mažam) teigiamam skaičiui ε yra toks natūralusis skaičius E, kad būtų

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ kai } n > E.$$

Seka (x_n) vadinama *nykstamąja seka*, jeigu $\lim x_n = 0$.

Pereikime prie uždavinių.

1 pavyzdys. Užrašykime pirmuosius 5 sekos narius, jei jos bendrasis narys yra:

1) $x_n = \frac{1+(-1)^n \cdot n}{n+1}$;

2) $x_n = 2x_{n-1} + 1,\ x_1 = 2$.

Sprendimas. 1) Pagal formulę $x_n = \frac{1+(-1)^n \cdot n}{n+1}$ gauname:

$$x_1 = \frac{1+(-1)\cdot 1}{1+1} = 0;$$

$$x_2 = \frac{1+(-1)^2\cdot 2}{2+1} = 1;$$

$$x_3 = \frac{1+(-1)^3\cdot 3}{3+1} = -\frac{1}{2};$$

$$x_4 = \frac{1+(-1)^4\cdot 4}{4+1} = 1;$$

$$x_5 = \frac{1+(-1)^5\cdot 5}{5+1} = -\frac{2}{3}.$$

2) Kadangi $x_1 = 2$, tai pagal formulę $x_n = 2x_{n-1} + 1$ gauname, kad

$$x_2 = 2x_1 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5;$$

$$x_3 = 2x_2 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11;$$

$$x_4 = 2x_3 + 1 = 2 \cdot 11 + 1 = 23;$$

$$x_5 = 2x_4 + 1 = 2 \cdot 23 + 1 = 47.$$

2 pavyzdys. Patikrinkime, ar seka (x_n), $x_n = \frac{n^2+1}{n^2+2}$, yra monotoninė seka.

Sprendimas. Skaičiuodami skirtumą $x_{n+1} - x_n$, gauname, kad

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2+2} - \frac{n^2+1}{n^2+2} = \frac{(n^2+2n+2)(n^2+2)-(n^2+1)(n^2+2n+3)}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} = \frac{2n+1}{(n^2+2n+3)(n^2+2)} > 0,$$

todėl seka yra didėjančioji seka, taigi monotoninė.

3 pavyzdys. Įsitikinkime, kad seka (x_n), $x_n = 2 + (-1)^n$, nėra monotoninė seka.

Sprendimas. Lengva matyti, kad

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 1,$$

ir to pakanka, kad suprastume, jog seka nėra monotoninė.

Dabar pagvildenkime sekos (x_n) bendrojo nario x_n nusakymo vien tik indeksu n problemą, kai žinoma x_n priklausomybė nuo pirmesnių (vieno ar kelių) sekos narių. Pavyzdžiui, $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$, kai $n \geq 3$, $x_1 = x_2 = 2$.

Aišku, kad pagal šią formulę (ji vadinama *rekurenčiąja formule*) visai nesunku sužinoti, koks yra, sakykim, septintasis sekos narys x_7. Bet tikrai nusibostų ieškoti 37-o sekos nario x_{37}, nes reikėtų sužinoti visus prieš jį esančius narius.

Seka (x_n), kuri nusakoma rekurenčiąja formule

$$x_{n+2} = px_{n-1} + qx_n,\ n \geq 1;\ p, q - \text{ (nelygūs nuliui) realieji skaičiai,}$$

vadinama *antros eilės tiesine homogenine rekurenčiąja seka.*

Šiuo atveju ieškoma *rekurenčiosios lygties*

$$x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n = 0 \qquad (1)$$

sprendinių, kurių pavidalas yra $x_n = r^n$. Tada $x_{n+1} = r^{n+1}$, $x_{n+2} = r^{n+2}$, todėl gaunama lygtis

$$r^{n+2} - pr^{n+1} - qr^n = 0,$$

o iš jos – lygtis

$$r^2 - pr - q = 0, \tag{2}$$

kuri vadinama *charakteringąja lygtimi.*

Galimi trys atvejai:

1) $D = p^2 + 4q > 0$;

2) $D = p^2 + 4q = 0$;

3) $D = p^2 + 4q < 0$.

Pirmu atveju (2) lygtis turi du sprendinius r_1 ir r_2, antru atveju – vieną sprendinį r, o trečiu atveju realiųjų sprendinių neturi (jo toliau nenagrinėsime).

Pagal gautus charakteringosios lygties $r^2 - pr - q = 0$ sprendimo rezultatus sudaromas rekurenčiosios lygties $x_{n+2} - px_{n+1} - qx_n = 0$ bendrasis sprendinys:

1) $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, jei $D > 0$; (3)

2) $x_n = C_1 \cdot r^n + C_2 \cdot nr^n$, jei $D = 0$. (4)

Čia C_1 ir C_2 – bet kurie realieji skaičiai. Jų reikšmės randamos pasinaudojus pirmųjų dviejų sekos narių x_1 ir x_2 reikšmėmis.

4 pavyzdys. Išspręskime rekurenčiąją lygtį

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n, \tag{5}$$

jei $x_1 = x_2 = 2$.

Sprendimas. Ieškodami sprendinių, kurių pavidalas yra $x_n = r^n$, gauname charakteringąją lygtį $r^{n+2} = 2r^{n+1} + 3r^n$, o iš jos – lygtį $r^2 - 2r - 3 = 0$, kuri turi du realiuosius sprendinius: $r_1 = -1$, $r_2 = 3$. Todėl (pagal (3)) bendrasis (5) lygties sprendinys yra

$$x_n = (-1)^n C_1 + C_2 \cdot 3^n;\ C_1, C_2 \text{ – realieji skaičiai.}$$

Iš sąlygos $x_1 = x_2 = 2$ gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2 = -C_1 + 3C_2, \\ 2 = C_1 + 9C_2, \end{cases}$$

kuri turi vienintelį sprendinį – $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{1}{3}$.

Vadinasi,

$$x_n = (-1)^n \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 3^n = (-1)^{n+1} + 3^{n-1}$$

yra vienintelis (5) lygties sprendinys, kuris tenkina sąlygą $x_1 = x_2 = 2$.

5 pavyzdys. Įrodykime, kad seka (x_n), $x_n = \frac{n+1}{n^2+2n+7}$, yra nykstamoji seka.

Sprendimas. Siekdami įrodyti, kad $\lim \frac{n+1}{n^2+2n+7} = 0$, pasirinkime bet kurį teigiamą skaičių ε (ε > 0) ir spręskime nelygybę

$$\frac{n+1}{n^2+2n+7} < \varepsilon, \tag{6}$$

nes $\left|\frac{n+1}{n^2+2n+7} - 0\right| = \frac{n+1}{n^2+2n+7}$.

Pažymėję $t = n + 1$, gausime, kad $n^2 + 2n + 7 = t^2 + 6$, todėl (6) nelygybė įgis pavidalą

$$\frac{t}{t^2+6} < \varepsilon. \tag{7}$$

Spręsdami ją gausime:

$$\frac{t}{t^2+6} - \varepsilon < 0,$$

$$\frac{-\varepsilon t^2+t-6\varepsilon}{t^2+6} < 0,$$

$$\varepsilon t^2 - t + 6\varepsilon > 0,$$

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + 6\varepsilon - \frac{1}{4\varepsilon} > 0,$$

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{24\varepsilon^2-1}{4\varepsilon} > 0. \tag{8}$$

Jei $24\varepsilon^2 - 1 > 0$, tai (8) nelygybė (todėl ir (7)) galioja esant bet kuriai t reikšmei, taigi esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n (nes $t = n + 1$).

Iš čia darome išvadą, kad pasirinkus $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ (6) nelygybė galioja esant bet kuriam natūraliajam skaičiui n.

Pasirinkus $\varepsilon \le \frac{1}{2\sqrt{6}}$, lygties

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{24\varepsilon^2-1}{4\varepsilon} = 0$$

sprendiniai būtų du (išskyrus atvejį $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{6}}$):

$$\left(\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 = \frac{1-24\varepsilon^2}{4\varepsilon},$$

$$\sqrt{\varepsilon}\, t - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} = \pm\frac{\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\sqrt{\varepsilon}\, t = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \pm \frac{\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$t = \frac{1\pm\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon},\ t_2 = \frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}.$$

Vadinasi, (7) nelygybės sprendinių aibė yra $\left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon};\ +\infty\right)$. O turint mintyje, kad $t \ge 2$, ji susiaurėja iki aibės

$$\left[2;\ \frac{1-\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon}; +\infty\right)$$

Aišku, kad pasirinkę bet kurį natūralųjį skaičių, priklausantį intervalui $\left(\frac{1+\sqrt{1-24\varepsilon^2}}{2\varepsilon};\ +\infty\right)$ ir pasižymėję jį E_1, gausime, jog

$$\frac{t}{t^2+6} < \varepsilon, \text{ jei tik } t > E_1.$$

Kadangi $n = t - 1$, tai pasirinkę $E = E_1 + 1$, galėsime teigti, kad

$$\frac{n+1}{n^2+2n+7} < \varepsilon, \text{ jei tik } n > E.$$

O tai ir reiškia, kad $lim\frac{n+1}{n^2+2n+7} = 0$ ir todėl seka (x_n), $x_n = \frac{n+1}{n^2+2n+7}$, yra nykstamoji seka.

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Parašykite pirmuosius 7 sekos (x_n),

$$x_n = \frac{1}{3-x_{n-1}}, \ n > 1,$$

narius, jei $x_1 = \frac{1}{2}$.

2. Parašykite pirmuosius 7 sekos (x_n),

$$x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}, \ x_1 = \frac{1}{2},$$

narius ir nuspręskite, kokia turėtų būti bendrojo nario x_n formulė.

3. Raskite mažiausią sekos (x_n) narį, jei

a) $x_n = n^2 - 5n + 1$;   b) $x_n = \frac{n^3+1}{2n^3+3}$.

4. Įrodykite, kad (x_n) yra mažėjančioji seka, jei

$$x_n = \frac{n+3}{2n+1}.$$

5. Nustatykite, ar (x_n) yra monotoninė seka, jei

$$x_n = y_{n+2}, \ y_n = \frac{2^n}{n!};$$

čia $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ (skaičiaus n faktorialas).

6. Raskite sekos (x_n), bendrąjį narį, jei

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n, \ x_1 = 2 \text{ ir } x_2 = 5.$$

7. Raskite sekos (x_n), tenkinančios rekurenčiąją lygtį $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ir sąlygą $x_1 = x_2 = 1$, bendrojo nario formulę.

8. Raskite rekurenčiosios lygties

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{1}{4}x_n$$

sprendinį, jei $x_1 = 1$ ir $x_2 = -\frac{1}{2}$.

9. Įrodykite, kad (x_n) yra nykstamoji seka, jei

$$x_n = \frac{7}{n+1}.$$

10. Įrodykite, kad $\lim x_n = 0$, jei

$$x_n = \frac{1}{n^2+5}.$$

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2022 m. gegužės 20 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA