

70-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Organizuojama nuotoliniu būdu, 2022 04 19
9–10 klasės

1. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x(x + y) = 4z - 1, \\ 2y(y + z) = 4x - 1, \\ 2z(z + x) = 4y - 1. \end{cases}$$

2. Trikampio ABC kampas B yra status, o jo pusiaukraštinės BD ir CE statmenos. Įžambinės AC statmuo, išvestas iš jos taško D , kerta statinį AB taške F . Raskite santykį $AF : FB$.
3. Ant stalo yra 7 krūvelės monetų, kuriose yra atitinkamai 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7 monetas. Agnė gali vienu ėjimu įdėti dar po vieną monetą į bet kurias 5 krūveles. Ar gali Agnė atlikti keletą ėjimų taip, kad po jų visose krūvelėse monetų taptų po lygiai? Jei taip, nustatykite kiek mažiausiai ėjimų tam prireiks.
4. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (a, b) , su kuriomis abu skaičiai $a^2 + 3b$ ir $3a + b^2$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai.

11–12 klasės

1. Raskite mažiausią reikšmę, kurią įgyja

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2},$$

kai x, y, z yra trys realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $x + y + z = 1$.

2. Taškas O yra apie smailejį trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Šio apskritimo liestinės, nubrėžtos per taškus A ir B , kertasi taške D . Tiesė, einanti per apskritimo centrą O ir kraštinės BC vidurio tašką, kerta kraštinę AC taške M . Įrodykite, kad tiesės BC ir DM yra lygiagrečios.
3. Ant stalo yra 7 krūvelės monetų, kuriose yra atitinkamai 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir 7 monetos. Agnė gali vienu ėjimu įdėti dar po vieną monetą į bet kurias 5 krūveles. Ar gali Agnė atlikti keletą ėjimų taip, kad po jų visose krūvelėse monetų taptų po lygiai? Jei taip, nustatykite kiek mažiausiai ėjimų tam prireiks.
4. Raskite visus natūraliuosius n , kuriems egzistuoja tokie trys skirtingi teigiami racionalieji skaičiai a, b, c , kad skaičiai $a + b^2 + c^2$, $a^2 + b + c^2$ ir $a^2 + b^2 + c$ yra sveikieji, o skaičius abc nėra sveikasis.