2022 metų Lietuvos mokinių matematikos olimpiados uždavinių sąlygos ir sprendimai

Artūras Dubickas[1]

70-oji Lietuvos mokinių matematikos olimpiada
Organizuojama nuotoliniu būdu, 2022 04 19

`1 (9-10 klasės).` Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x(x+y) = 4z-1, \\ 2y(y+z) = 4x-1, \\ 2z(z+x) = 4y-1. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudėję visas tris lygtis, gauname

$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 4x+4y+4z-3.$$

Vadinasi,

$$(x+y)^2 - 2(x+y) + 1 + (y+z)^2 - 2(y+z) + 1 + (z+x)^2 - 2(z+x) + 1 = 0,$$

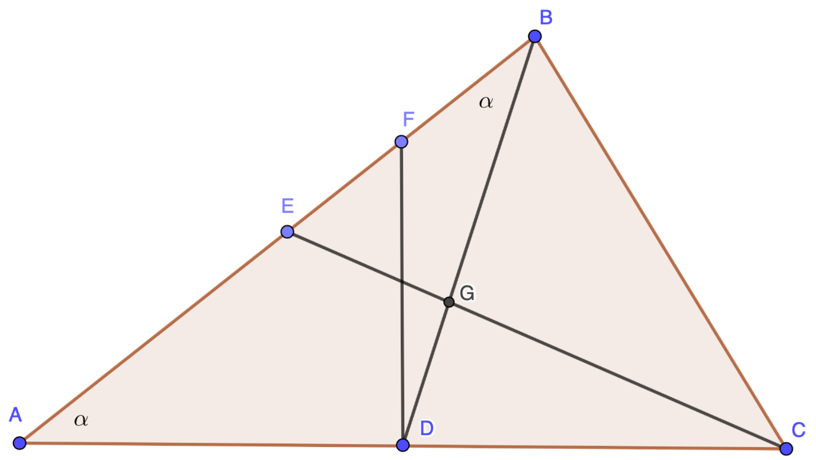
todėl $(x+y-1)^2 + (y+z-1)^2 + (z+x-1)^2 = 0$. Kairioji šios lygybės pusė yra neneigiama. Ji gali būti lygi nuliui tik tada, kai $x+y=1$, $y+z=1$ ir $z+x=1$. Sudėję pirmąją ir trečiąją iš šių lygybių ir atėmę antrąją, gauname $2x = x+y+z+x-y-z = 1+1-1 = 1$, taigi $x = \frac{1}{2}$. Iš čia išplaukia, kad $y = \frac{1}{2}$ ir $z = \frac{1}{2}$. Kadangi trejetas $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tenkina duotąją lygčių sistemą, tai jis yra vienintelis jos sprendinys.

Atsakymas: $(x,y,z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

`2 (9-10 klasės).` Trikampio ABC kampas B yra status, o jo pusiaukraštinės BD ir CE statmenos. Įžambinės AC statmuo, išvestas iš jos taško D, kerta statinį AB taške F. Raskite santykį $AF : FB$.

Sprendimas. Pažymėkime pusiaukraštinių BD ir CE sankirtos tašką G ir $\angle CAB = \alpha$. Įrodysime, kad trikampiai CAE ir DBF yra panašūs.

[1]Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos institutas, Naugarduko 24, Vilnius LT-03225. `http://www.mif.vu.lt/~dubickas/`



Kadangi stačiojo trikampio ABC pusiaukraštinė BD yra lygi pusei įžambinės AC, tai $AD = BD$. Vadinasi, $\angle FBD = \angle ABD = \alpha = \angle CAE$. Trikampis BGE yra status, todėl $\angle AEC = \angle EGB + \angle EBG = 90^\circ + \alpha$. Trikampis ADF taip pat statusis, taigi $\angle DFB = \angle ADF + \angle FAD = 90^\circ + \alpha = \angle AEC$. Iš čia išplaukia, kad trikampiai CAE ir DBF turi vienodus kampus, todėl yra panašūs. Iš $AE : FB = AC : BD = 2$ gauname, kad $EB = AE = 2FB$. Taigi F yra atkarpos EB vidurio taškas, todėl $AF : FB = 3$.

Atsakymas: 3.

`3 (9-12 klasės).` Ant stalo yra 7 krūvelės monetų, kuriose yra atitinkamai $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ir 7 monetos. Agnė gali vienu ėjimu įdėti dar po vieną monetą į bet kurias 5 krūveles. Ar gali Agnė atlikti keletą ėjimų taip, kad po jų visose krūvelėse monetų taptų po lygiai? Jei taip, nustatykite kiek mažiausiai ėjimų tam prireiks.

Sprendimas. Tarkime, kad po k Agnės ėjimų visose krūvelėse monetų tapo po lygiai. Kiekvienu ėjimu Agnė prideda po 5 monetas, taigi iš viso monetų yra

$$1+2+3+4+5+6+7+5k=28+5k.$$

Vadinasi, kiekvienoje krūvelėje yra po $4+\frac{5k}{7}$ monetas, todėl k dalijasi iš 7. Be to, kadangi po k ėjimų pirmojoje krūvelėje yra ne daugiau kaip $1+k$ monetų, tai $4+\frac{5k}{7}\leqslant 1+k$. Iš čia gauname, kad $\frac{2k}{7}\geqslant 3$, taigi $k\geqslant\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}$. Kadangi k dalijasi iš 7, tai $k\geqslant 14$.

Įrodysime, kad po 14 Agnės ėjimų visose krūvelėse gali būti po $4+\frac{5\cdot 14}{7}=14$ monetų. Pavyzdžiui, Agnė pirmais trimis savo ėjimais gali pridėti po monetą prie visų krūvelių, išskyrus trečią ir septintą. Po šių trijų ėjimų monetos bus išsidėsčiusios taip: $4,5,3,7,8,9,7$. Kitais trimis ėjimais ji prideda po monetą prie visų krūvelių, išskyrus penktą ir šeštą, ir gauna tokį išsidėstymą: $7,8,6,10,8,9,10$. Tada ji du ėjimus atlieka su visomis krūvelėmis, išskyrus antrą ir septintą: $9,8,8,12,10,11,10$. Po to du ėjimus su visomis krūvelėmis, išskyrus ketvirtą ir šeštą: $11,10,10,12,12,11,12$. Dabar dar du ėjimus su visomis krūvelėmis, išskyrus ketvirtą ir penktą: $13,12,12,12,12,13,14$. Po to vieną ėjimą su visomis krūvelėmis, išskyrus pirmą ir septintą: $13,13,13,13,13,14,14$. Iš viso Agnė jau atliko $3+3+2+2+2+1=13$ ėjimų. Galiausiai, savo keturioliktuoju ėjimu Agnė prideda po monetą prie visų krūvelių, išskyrus šeštą ir septintą. Po šio ėjimo visose septyniose krūvelėse bus po 14 monetų.

Atsakymas: gali po mažiausiai 14 ėjimų.

`4 (9-10 klasės).` Raskite visas natūraliųjų skaičių poras (a,b), su kuriomis abu skaičiai a^2+3b ir $3a+b^2$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai.

Sprendimas. Akivaizdu, kad jei pora (a,b) tenkina uždavinio sąlygą, tai ir pora (b,a) taip pat ją tenkina. Taigi pakanka surasti visas natūraliųjų skaičių poras (a,b), kuriose $a\geqslant b$.

Tegu $a\geqslant b$. Kadangi $a^2<a^2+3b\leqslant a^2+3a<(a+2)^2$ ir a^2+3b yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, tai $a^2+3b=(a+1)^2$. Iš čia išplaukia, kad $3b=2a+1$, todėl b yra nelyginis skaičius, $b=2k-1$, čia $k\in\mathbb{N}$. Naudodamiesi lygybe $2a=3b-1=6k-3-1=2(3k-2)$, gauname natūraliųjų skaičių porą

$$(a,b)=(3k-2,2k-1).$$

Su bet kokia natūraliąja k reikšme $a^2 + 3b = (3k-2)^2 + 3(2k-1) = (3k-1)^2$ yra natūraliojo skaičiaus $3k-1$ kvadratas. Belieka rasti visus $k \in \mathbb{N}$, su kuriais skaičius

$$3a + b^2 = 3(3k-2) + (2k-1)^2 = 4k^2 + 5k - 5$$

taip pat yra natūraliojo skaičiaus kvadratas.

Akivaizdu, kad $4k^2 + 5k - 5$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, kai $k = 1$. Taip gauname porą $(a, b) = (1, 1)$, tenkinančią uždavinio sąlygą. Tegu $k > 1$. Tada $(2k)^2 < 4k^2 + 5k - 5 < (2k+2)^2$. Vadinasi, vienintelė galimybė yra $4k^2 + 5k - 5 = (2k+1)^2$. Iš lygybės $4k^2 + 5k - 5 = 4k^2 + 4k + 1$ išplaukia, kad $k = 6$. Taip gauname porą $(a, b) = (16, 11)$, kuri tenkina uždavinio sąlygą. Dar vieną porą $(a, b) = (11, 16)$, tenkinančią uždavinio sąlygą, gauname sukeitę vietomis a ir b.

Atsakymas: $(a, b) = (1, 1), (16, 11)$ ir $(11, 16)$.

`5 (11-12 klasės).` Raskite mažiausią reikšmę, kurią įgyja

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2},$$

kai x, y, z yra trys realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $x + y + z = 1$.

Sprendimas. Pažymėkime reiškinį, kurio mažiausią reikšmę norime nustatyti, $f(x, y, z)$. (Akivaizdu, kad funkcija $f(x, y, z)$ yra apibrėžta su visais realiaisiais skaičiais x, y, z.) Įrodysime, kad $f(x, y, z) \geqslant \sqrt{3}$, kai $x + y + z = 1$. Kadangi $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \sqrt{3}$ ir $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, tai ši reikšmė $\sqrt{3}$ ir bus mažiausia, kurią gali įgyti $f(x, y, z)$, kai $x + y + z = 1$.

Įsitikinkime, kad su visais realiaisiais x, y galioja nelygybė

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y).$$

Iš tiesų, ji akivaizdi, kai $x+y$ yra neigiamas skaičius. Kai $x+y$ yra neneigiamas skaičius, tai ši nelygybė yra ekvivalenti nelygybei $4(x^2 + xy + y^2) \geqslant 3(x+y)^2$. Pastaroji nelygybė galioja su visais realiaisias x, y, kadangi jos kairiosios ir dešiniosios pusės skirtumas yra lygus $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$.

Analogiškai, su visais realiaisiais x, y, z galioja nelygybės

$$\sqrt{y^2 + yz + z^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z) \quad \text{ir} \quad \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(z + x).$$

Sudėję visas tris nelygybes, gauname, kad su visais realiaisiais x, y, z yra teisinga nelygybė

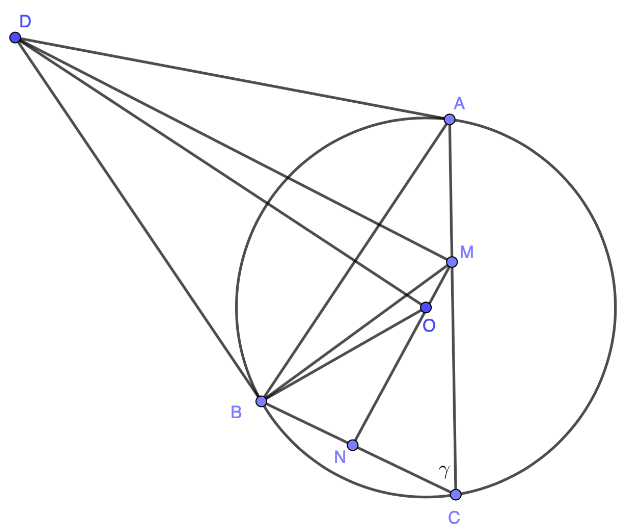
$$f(x,y,z) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y+z) + \frac{\sqrt{3}}{2}(z+x) = \sqrt{3}(x+y+z).$$

Vadinasi, jei $x+y+z=1$, tai $f(x,y,z) \geqslant \sqrt{3}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Atsakymas: $\sqrt{3}$.

`6 (11-12 klasės).` Taškas O yra apie smailųjį trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras. Šio apskritimo liestinės, nubrėžtos per taškus A ir B, kertasi taške D. Tiesė, einanti per apskritimo centrą O ir kraštinės BC vidurio tašką, kerta kraštinę AC taške M. Įrodykite, kad tiesės BC ir DM yra lygiagrečios.

Sprendimas. Tegul N yra kraštinės BC vidurio taškas ir $\angle BCA = \gamma$. Kadangi apibrėžtinio apkritimo centras O yra trikampio ABC kraštinių vidurio statmenų susikirtimo taškas, tai $NM \perp BC$. Vadinasi, pakanka įrodyti, kad $NM \perp DM$, o tai ekvivalentu $\angle DMO = 90°$.



Trikampis BMC yra lygiašonis (pusiaukraštinė sutampa su aukštine), taigi $BM = MC$ ir $\angle MBC = \angle BCM = \gamma$. Iš stačiojo trikampio MNB gauname $\angle BMN = 90^\circ - \gamma$. Kadangi $OB \perp DB$ ir $OA \perp DA$ (liestinių savybė) ir $OB = OA$, tai $\angle BOD = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle BCA = \gamma$. Iš stačiojo trikampio OBD gauname, kad

$$\angle BDO = 90^\circ - \angle BOD = 90^\circ - \gamma = \angle BMN = \angle BMO.$$

Vadinasi, taškai B, D, M, O priklauso vienam apskritimui. To apskritimo skersmuo yra DO, kadangi $\angle OBD = 90^\circ$. Vadinasi, trikampis DMO taip pat yra status ir $\angle DMO = 90^\circ$, ką ir reikėjo įrodyti.

`7 (11-12 klasės).` Raskite visus natūraliuosius n, kuriems egzistuoja tokie trys skirtingi teigiami racionalieji skaičiai a, b, c, kad skaičiai $a+b^2+c^2$, a^2+b+c^2 ir $a^2 + b^2 + c$ yra sveikieji, o skaičius $nabc$ nėra sveikasis.

Sprendimas. Jei n nesidalija iš 8, tai ieškomi $a, b, c \in \mathbb{Q}$ egzistuoja. Pavyzdžiui, galime paimti $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ ir $c = \frac{5}{2}$. Tada $a + b^2 + c^2 = 9$, $a^2 + b + c^2 = 8$ ir $a^2 + b^2 + c = 5$ yra sveikieji skaičiai, o skaičius $nabc = \frac{15n}{8}$ nėra sveikasis.

Tarkime, kad n dalijasi iš 8, t. y. $n = 8k$, čia $k \in \mathbb{N}$. Įrodysime, jog su visais $a, b, c \in \mathbb{Q}$, kuriems $a + b^2 + c^2 \in \mathbb{Z}$, $a^2 + b + c^2 \in \mathbb{Z}$ ir $a^2 + b^2 + c \in \mathbb{Z}$, skaičiai $2a, 2b, 2c$ yra sveikieji. Tada $nabc = 8kabc = k(2a)(2b)(2c) \in \mathbb{Z}$, todėl su tokiais n ieškomi $a, b, c \in \mathbb{Q}$ neegzistuoja.

Pažymėkime $a = \frac{A}{D}$, $b = \frac{B}{D}$ ir $c = \frac{C}{D}$. Čia $A, B, C, D \in \mathbb{N}$ yra tokie, kad didžiausias bendras skaičių A, B, C, D daliklis yra lygus 1. Kadangi

$$a + b^2 + c^2 = \frac{AD + B^2 + C^2}{D^2} \in \mathbb{Z},$$

tai D dalija $AD+B^2+C^2$, todėl dalija ir B^2+C^2. Analogiškai, D dalija A^2+C^2 ir $A^2 + B^2$. Taigi D dalija $A^2 + B^2 + A^2 + C^2 - (B^2 + C^2) = 2A^2$. Lygiai taip pat gauname, kad D dalija $2B^2$ ir $2C^2$. Įrodysime, kad $D \in \{1, 2\}$. Iš tiesų, jei koks nors nelyginis pirminis skaičius p dalija D, tai jis dalija ir $2A^2, 2B^2, 2C^2$, vadinasi, p dalija ir A, B, C, prieštara. Taigi D yra dvejeto laipsnis su sveikuoju neneigiamu rodikliu. Kita vertus, jei D dalijasi iš 4, tai 4 dalija $2A^2, 2B^2$ ir $2C^2$. Tada 2 dalija A, B, C ir D, vėl prieštara. Vadinasi, D nesidalija iš 4.

Įrodėme, kad $D = 1$ arba $D = 2$. Abiem atvejais, $\frac{2}{D} \in \mathbb{Z}$, taigi $2a = \frac{2A}{D} \in \mathbb{Z}$ ir lygiai taip pat $2b \in \mathbb{Z}$ bei $2c \in \mathbb{Z}$, ką ir reikėjo įrodyti.

Atsakymas: visi natūralieji skaičiai n, kurie nesidalija iš 8.