PENKTOJI VILNIAUS UNIVERSITETO MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETO MATEMATIKOS OLIMPIADA

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

IX klasė

1. Ats. Sprendinių nėra.

Sudėkime tris duotąsias lygtis ir sugrupuokime narius kairėje lygybės pusėje:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 6z + 9) = 0 \implies$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 0 \implies x - 1 = y - 2 = z - 3 = 0.$$

Gauname vienintelį galimą sprendinį $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, bet net ir jis netenkina duotosios sistemos.

2. Ats. Taip, įmanoma. Pavyzdžiui,

5	27	8	4
24	10	2	9
3	16	15	6
12	1	18	20

arba

7	4	12	15
9	14	20	2
8	5	21	6
10	18	1	28

Norint gauti reikiamą pavyzdį, verta pastebėti kai kurias bendras lentelės savybes.

Jei lentelėje būtų skaičius 11, tai kiekvienoje eilutėje turėtų būti po skaičiaus 11 kartotinį. Tačiau galima panaudoti tik kartotinius 11 ir 22. Todėl lentelėje nėra skaičiaus 11, taip pat skaičiaus 22. Panašiai atmetami skaičiai 13, 17, 19, 23, 26, 29. Jei lentelėje įrašytas skaičius 25, tai kiekvienoje iš likusių trijų eilučių skaičių sandauga turi dalytis iš 25. Tose eilutėse turi būti po du iš skaičių 5, 10, 15, 20, 30. Reikia šešių skaičių, o galime panaudoti tik penkis. Vadinasi, turime atmesti ir skaičių 25.

Galimi du atvejai: arba lentelėje nėra skaičiaus 7 kartotinių, arba yra.

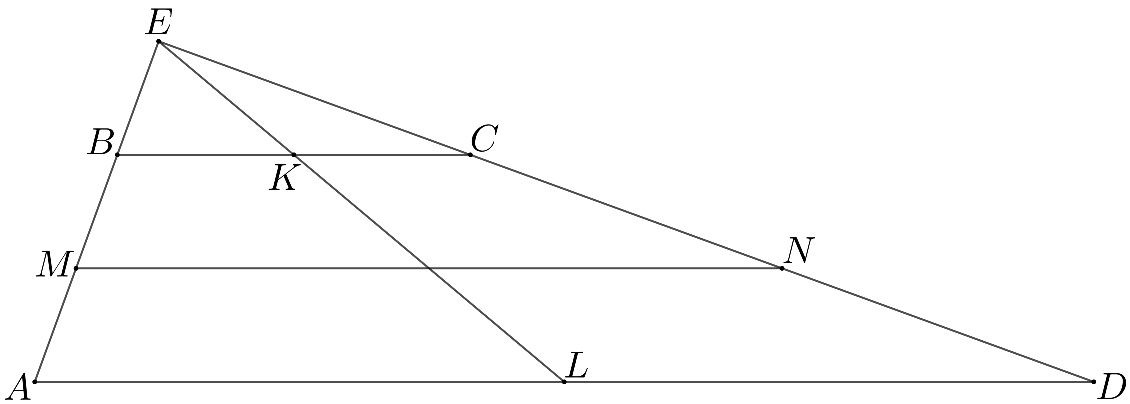
Pirmuoju atveju turime panaudoti 16 iš 17 skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 27, 30. Jei kiekvienos eilutės skaičių sandauga lygi P, tai lentelės 16 skaičių sandauga turi būti lygi P^4. Tuo tarpu 17 skaičių sandauga lygi $2^{21} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$. Jei atmesime skaičių 30, tai gausime $P^4 = 2^{20} \cdot 3^{12} \cdot 5^4$ ir $P = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$. Lentelės kiekvienoje eilutėje ir stulpelyje turi būti po vieną iš skaičių 5, 10, 15, 20, todėl galima pamėginti surašyti juos lentelės įstrižainėje. Toliau, atsižvelgiant į P reikšmę, kurią reikia gauti eilutėse bei stulpeliuose, lentelę galima užpildyti spėliojant. Taip gaunamas pirmasis pateiktas lentelės pavyzdys.

Antruoju atveju kiekvienos eilutės skaičių sandauga P dalijasi iš 7, todėl kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje turi būti po vieną iš skaičių 7, 14, 21, 28. Kad taip nutiktų, galima surašyti skaičius lentelės įstrižainėje. Jei lentelėje esama ir skaičių, kurie dalijasi iš 5, tai kiekvienoje eilutėje ir stulpelyje turi būti po vieną iš skaičių 5, 10, 15, 20, 30. Vienas iš šių penkių skaičių turi likti nepanaudotas. Surašius skaičius 5, 10, 15, 20 kitoje lentelės įstrižainėje, likusius 8 skaičius galima parinkti spėliojant.

Taip gaunamas antrasis pateiktas lentelės pavyzdys. Galimas ir atvejis, kai lentelėje esama skaičiaus 7, bet ne skaičiaus 5 kartotinių: tereikia pirmajame lentelės pavyzdyje 5, 10, 15, 20 pakeisti atitinkamai į 7, 14, 21, 28.

3. Ats. $AD = 6$, $BC = 2$.

   Tiesių AB ir CD sankirtos tašką pažymėkime E. Kadangi $\angle DAB + \angle CDA = 90°$, tai trikampiai ADE ir BCE statieji. Stačiojo trikampio BCE pusiaukraštinė EK lygi pusei jo įžambinės. Tada $KE = BC/2 = KB$ ir $\angle BEK = \angle EBK = \angle BAD$ (atitinkamieji kampai). Analogiškai, stačiajame $\triangle ADE$ turime $LE = AD/2 = LA$ ir $\angle AEL = \angle EAL = \angle BAD$. Tada $\angle AEL = \angle BEK$, ir taškai E, K, L yra vienoje tiesėje.



   Vadinasi,

$$AD/2 - BC/2 = EL - EK = KL = 2, \qquad (AD + BC)/2 = MN = 4,$$

$$AD = 2 + 4 = 6, \qquad BC = 4 - 2 = 2.$$

4. Ats. 90 skaičių 10 000, 11 000, 12 000, …, 98 000, 99 000.

   Pažymėkime $n = \overline{ABCDE}$. Tada $n = 1000a + 100C + b$, kur $a = 10A + B$, $b = 10D + E$, ir skaičius n dalijasi iš $m = \overline{ABDE} = 100a + b \geqslant 1000$. Iš m dalijasi ir skaičius $k = n - 10m = 100C - 9b$. Čia

$$k \leqslant 100 \cdot 9 - 9 \cdot 0 = 900, \qquad k \geqslant 100 \cdot 0 - 9 \cdot 99 > -900,$$

   todėl $|k| < m$. Neneigiamas sveikasis skaičius $|k|$ dalijasi iš už save didesnio skaičiaus, tik jei lygus 0. Vadinasi, $n - 10m = k = 0$, $\overline{ABCDE} = n = 10m = \overline{ABDE0}$, $E = 0$, $D = E = 0$, $C = D = 0$. Visi skaičiai $n = \overline{AB000}$ tinka: $\overline{AB000} : \overline{AB00} = 10$.

X klasė

1. Ats. Visi sveikieji skaičiai, išskyrus skaičius, kurie dalijasi iš 6 su liekana 1, t. y. išskyrus skaičius …, -11, -5, 1, 7, 13, …

   Kadangi skaičių sveikosios dalys yra sveikieji skaičiai, tai $x = \left[\frac{2x}{3}\right] + \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{6}\right]$ yra sveikasis skaičius. Prie kiekvieno sveikojo skaičiaus gali būti kelis kartus pridėta arba iš jo kelis kartus atimta po 6, kad gautume vieną iš skaičių 0, 1, 2, 3, 4, 5 (tai būtų to sveikojo skaičiaus dalybos iš 6 liekana). Todėl galime tarti, kad $x = 6k + r$, kur $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Įrašę $x = 6k + r$ į pradinę lygtį ir pasinaudoję išraiškomis

$$\left[\frac{x}{6}\right] = \left[\frac{r}{6} + k\right] = \left[\frac{r}{6}\right] + k, \quad \left[\frac{2x}{3}\right] = \left[\frac{2r}{3} + 4k\right] = \left[\frac{2r}{3}\right] + 4k, \quad \left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{r}{2} + 3k\right] = \left[\frac{r}{2}\right] + 3k,$$

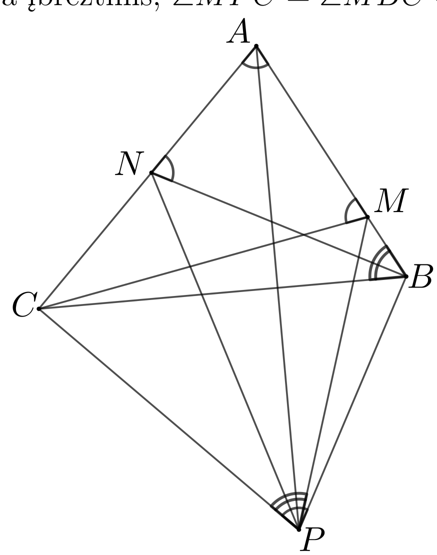
gauname uždavinį, ekvivalentų pradiniam: reikia rasti visas tokias skaičių $k \in \mathbb{Z}$ ir $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ poras, kad

$$r + \left[\frac{r}{6}\right] = \left[\frac{2r}{3}\right] + \left[\frac{r}{2}\right].$$

Patikrinę $r = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, gauname, kad netinka tik $r = 1$. Vadinasi, pradinę lygtį tenkina visos galimos reikšmės $x = 6k + r$, kur $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$, t. y. visi sveikieji skaičiai x, kurie nesidalija iš 6 su liekana 1.

2. Žr. IX klasės 2 uždavinio sprendimą.

3. Trikampio ABC kampus A, B, C atitinkamai pažymėkime α, β, γ. Kadangi $CA = CM$, tai $\angle AMC = \angle MAC = \alpha$ ir $\angle BMC = 180° - \alpha$. Dėl taškų A ir P simetriškumo, $\angle BPC = \angle BAC = \alpha = 180° - \angle BMC$, ir todėl keturkampis $BMCP$ yra įbrėžtinis, $\angle MPC = \angle MBC = \beta$.



Dėl taškų A ir P simetriškumo turime $AP \perp BC$, $CA = CP$, $\angle APC = \angle CAP = 90° - \gamma$. Todėl $\angle APM = \angle CPM - \angle CPA = \beta - (90° - \gamma) = 90° - \alpha$.

Analogiškai įrodoma, kad keturkampis $BNCP$ įbrėžtinis, $\angle NPB = \angle NCB = \gamma$ ir kad $\angle APN = 90° - \alpha$. Vadinasi, $\angle APN = \angle APM$.

4. Žr. IX klasės 4 uždavinio sprendimą.

XI ir XII klasės

1. Žr. X klasės 1 uždavinio sprendimą.

2. Ats. n gali būti bet kuris lyginis skaičius, didesnis už 2; mažiausia galima k reikšmė yra $k = 1$, jei toks n dalijasi iš 4, ir $k = 2$, jei nesidalija.

   Nudažykime kiekvieną $n \times n$ lentos langelį juodai arba baltai, kad jokie du gretimi langeliai nebūtų vienspalviai. Baltų ir juodų langelių skaičių atitinkamai pažymėkime b ir j. Tarkime, kad lenta reikiamu būdu padengta figūromis, kad kiekvieną langelį dengia k figūrų ir kad iš viso panaudota a figūrų. Kiekviena figūra dengia du baltus ir du juodus langelius, todėl $2a = bk$ ir $2a = jk$. Tada $b = j$ ir $n^2 = b + j = 2b$. Vadinasi, skaičius n turi būti lyginis. Akivaizdu, kad netinka $n = 2$.

   Iš dviejų figūrų galima sudaryti stačiakampį 2×4. O iš tokių stačiakampių – bet kokį kvadratą $n \times n$, kai $n = 4, 8, 12, \ldots$ Todėl n gali būti bet koks natūralusis skaičius, dalus iš 4, ir tokiu atveju galime imti $k = 1$.

   Stačiakampį 2×6 galima padengti 6 figūromis, kaip parodyta paveikslėlyje (kiekvieną langelį dengia dvi iš figūrų A, B, C, D, E, F).

AB	AC	AC	CD	DE	DF
AB	BC	BE	EF	EF	DF

   Lentą 6×6 galima padalyti į tris tokius stačiakampius, todėl reikšmė $n = 6$ tenkina uždavinio sąlygą, kai $k = 2$.

   Tarkime, kad $n > 6$ dalijasi iš 2, bet ne iš 4. Tada $n \times n$ lentelę galima padalyti du stačiakampius: $n \times 6$ ir $n \times (n - 6)$. Pirmąjį iš jų galima išskaidyti į stačiakampius 2×6, o antrąjį – į stačiakampius 2×4 (nes $n - 6$ dalijasi iš 4). Kiekvieną stačiakampį 2×6 galima uždengti 6 figūromis, o kiekvieną stačiakampį 2×4 – du kartus uždengti dviem figūromis (iš viso keturiomis). Vadinasi, tokios n reikšmės tenkina uždavinio sąlygą, kai $k = 2$.

   Tarkime, kad $n > 2$ dalijasi iš 2, bet ne iš 4. Nudažykime kiekvieną $n \times n$ lentos eilutę juodai arba baltai, kad jokios dvi gretimos eilutės nebūtų vienspalvės. Tarkime, kad lenta reikiamu būdu padengta figūromis ir kad $k = 1$. Kiekviena figūra dengia arba tris baltus ir vieną juodą langelius, arba tris juodus ir vieną baltą. Vienokių ir kitokių figūrų skaičių atitinkamai pažymėkime B ir J. Lygiai pusė lentos langelių yra balti, todėl $n^2/2 = 3B + J$, $n^2/2 = B + 3J$. Tada $0 = (3B + J) - (B + 3J) = 2(B - J)$, $B = J$, $n^2/2 = 4B$, $(n/2)^2 = 2B$, ir skaičius $n/2$ yra lyginis. Gavome prieštarą. Vadinasi, jei $n > 2$ dalijasi iš 2, bet ne iš 4, tai minimali k reikšmė yra 2.

3. Žr. X klasės 3 uždavinio sprendimą.

4. Ats. $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, 2)$, $(\frac{1}{2}, 2, 1)$, $(\frac{2}{3}, 3, \frac{1}{2})$, $(2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2})$, $(1, \frac{1}{2}, 2)$, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3)$, $(\frac{3}{2}, 2, \frac{1}{3})$, $(2, 1, \frac{1}{2})$, $(3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, $(1, 1, 1)$.

   Pastebėkime, kad jei $b = c = 1$, tai $\frac{1}{z} = b - y < 1$, $z = c - \frac{1}{x} < 1$, bet $1 = \frac{1}{z} \cdot z$. Gavome prieštarą. Analogiškai įrodoma, kad situacijos $a = b = 1$ ir $c = a = 1$ nėra įmanomos.

   Sąlygoje duotos trys lygybės, ir galima eliminuoti du nežinomuosius. Verta palikti natūraliuosius nežinomuosius, todėl eliminuokime y ir z:

$$y = \frac{1}{a - x} \quad (\text{ir } a \neq x), \qquad z = \frac{cx - 1}{x} \quad (\text{ir } cx \neq 1), \qquad b = \frac{1}{a - x} + \frac{x}{cx - 1},$$

$$(bc-1)x^2+(a-b+c-abc)x+(ab-1)=0.$$

Kadangi $bc-1>0$, tai turime kvadratinę lygtį nežinomojo x atžvilgiu. Tos lygties diskriminantas lygus

$$D=(a-b+c-abc)^2-4(bc-1)(ab-1)=(a+b+c-abc)^2-4\geqslant 0.$$

Jei D nėra tikslusis kvadratas, tai $\sqrt{D}$ ir x yra iracionalieji skaičiai. Vadinasi, D ir $D+4$ yra tikslieji kvadratai. Jei $\sqrt{D}=n\geqslant 2$, tai $D+4=n^2+4<n^2+2n+1$. Netinka ir $D=1$, todėl $D=0$ ir $a+b+c=abc\pm 2$. Turėdami tinkamus a,b,c, skaičius x,y,z galime rasti pagal formules $x=-\frac{a-b+c-abc}{2(bc-1)}$, $y=\frac{1}{a-x}$, $z=\frac{cx-1}{x}$. Nagrinėkime tris atvejus.

1) Tegu $a=1$. Tada $bc-b-c=1\pm 2$, $(b-1)(c-1)=2\pm 2$. Kadangi $b,c\neq 1$, tai $(b-1)(c-1)=4$, $b-1=1$, 2 arba 4. Tada $(a,b,c)=(1,2,5)$, $(1,3,3)$ arba $(1,5,2)$. Atitinkamai gauname $(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{3}{2},2)$, $(\frac{1}{2},2,1)$, $(\frac{2}{3},3,\frac{1}{2})$.

2) Tegu $b=1$ arba $c=1$. Analogiškai gauname $(x,y,z)=(2,\frac{1}{3},\frac{3}{2})$, $(1,\frac{1}{2},2)$, $(\frac{1}{2},\frac{2}{3},3)$, $(\frac{3}{2},2,\frac{1}{3})$, $(2,1,\frac{1}{2})$, $(3,\frac{1}{2},\frac{2}{3})$.

3) Tegu $a,b,c\geqslant 2$. Jei $a\geqslant 3$, tai

$$abc-a-b-c\geqslant 3(bc-1)-b-c=$$
$$=b(3c-1)-c-3\geqslant 2(3c-1)-c-3=5c-5\geqslant 5.$$

Todėl $a=2$ ir analogiškai $b=c=2$. Gauname $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Visi 10 rastųjų sprendinių tenkina uždavinio sąlygą.