LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

III. STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI

(2021–2023)

Teorinę medžiagą parengė bei trečiąją užduotį sudarė VU docentas Edmundas Mazėtis

Stereometrija (iš graikų kalbos „stereos“ – erdvė, „metreo“ – matuoju) – tai erdvės geometrija. Stereometrija nagrinėja erdvinių figūrų savybes. Kas tai yra plokštuma, visi įsivaizduoja; planimetrijoje plokštuma nagrinėjama nepriklausomai nuo ją supančios erdvės. Tuo tarpu stereometrijoje plokštumos suprantamos kaip erdvės taškų aibės, be to, kiekvienoje plokštumoje galioja planimetrija – plokštumos geometrija. Taigi nagrinėdami erdvės geometriją ir spręsdami uždavinius, naudosime planimetrijos sąvokas, teiginius ir formules.

Geometrijoje kaip ir bet kurioje kitoje matematikos mokslo šakoje pradiniai faktai gaunami iš praktikos, jie yra vaizdūs ir akivaizdūs. Tie faktai yra vadinami aksiomomis, aksiomos apibūdina taip vadinamas pirmines sąvokas, t. y. tas sąvokas, kurios nėra apibrėžiamos. Kitos sąvokos yra apibrėžiamos, naudojant pirmines sąvokas ir jau apibrėžtas sąvokas. Kiti geometrijos faktai – vadinami teoremomis – įrodomi naudojant aksiomas ir jau įrodomas teoremas.

Stereometrijos aksiomos apibūdina tokias sąvokas: taškas, tiesė, plokštuma. Išvardysime jas:

1. Bet kuriems trims erdvės taškams egzistuoja plokštuma, kuriai tie taškai priklauso. Tuomet sakoma, kad ši plokštuma eina per duotuosius taškus.

2. Jei dvi plokštumos turi bendrą tašką, tai jos turi bendrą tiesę. Tuomet sakoma, kad dviejų plokštumų sankirta yra tiesė.

3. Jei teisei priklauso du plokštumos taškai, tai visi tiesės taškai yra toje plokštumoje. Tuomet sakoma, kad tiesė yra plokštumoje.

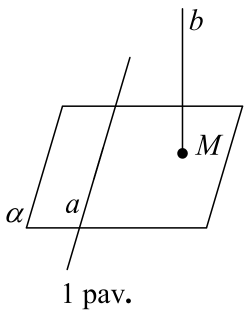
4. Kiekvienoje erdvės plokštumoje yra teisingos visos plokštumos geometrijos (planimetrijos) aksiomos ir teoremos.

Iš šių aksiomų lengvai įrodomos tokios stereometrijos teoremos:

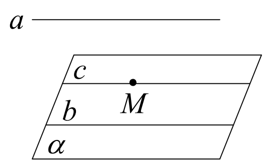
1 teorema. Jei trys taškai nėra vienoje tiesėje, tai egzistuoja vienintelė plokštuma, kuriai priklauso tie trys taškai.

2 teorema. Per tiesę ir jai nepriklausantį tašką eina vienintelė plokštuma.

Dvi erdvės tiesės a ir b yra vadinamos *prasilenkiančiomis*, jei nėra tokios plokštumos, kuriai priklauso ir tiesė a, ir tiesė b. Jei tiesės a ir b yra vienoje plokštumoje, tai jos arba turi vienintelį bendrą tašką (jos yra susikertančios), arba neturi bendrų taškų (tiesės a ir b lygiagrečios $a \parallel b$).



1 pav.



2 pav.

3 teorema. Per dvi susikertančias tieses eina vienintelė plokštuma.

4 teorema. Per dvi lygiagrečias tieses eina vienintelė plokštuma.

Tiesė a ir plokštuma α gali turėti vieną bendrą tašką (tiesė kerta plokštumą), neturėti nė vieno bendro taško (tiesė lygiagreti su plokštuma), o taip pat tiesė gali priklausyti plokštumai.

5 teorema (prasilenkiančių tiesių požymis). Jei tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b kerta plokštumą α taške M, nepriklausančiame tiesei a, tai tiesės a ir b yra prasilenkiančios (1 pav.).

6 teorema. Kokia bebūtų tiesė a ir jai nepriklausantis taškas A, per tašką A eina vienintelė tiesė b, lygiagreti su tiese a.

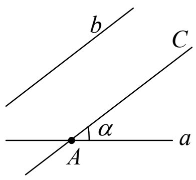
7 teorema. Jei tiesė a lygiagreti su tiese b, o tiesė b lygiagreti su tiese c, tai tiesės a ir c yra lygiagrečios.

8 teorema. Jei tiesės a ir b yra lygiagrečios, o tiesė a kerta plokštumą α, tai ir tiesė b kerta plokštumą α.

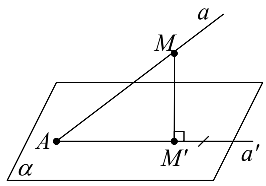
1 pavyzdys. Tiesė b yra plokštumoje α, ji yra lygiagreti su tiese a, kuri nėra plokštumoje α. Per plokštumos α tašką M, nepriklausantį tiesei b, nubrėžta tiesė c, lygiagreti su tiese a (2 pav.). Įrodysime, kad tiesė c yra plokštumoje α.

Sprendimas. Kadangi tiesės a ir b yra lygiagrečios, o tiesės a ir c yra lygiagrečios, tai tiesė b lygiagreti su tiese c (7 teorema). Sakykime, kad tiesė c nėra plokštumoje α. Kadangi tiesė c ir plokštuma α turi bendrą tašką, tai tiesė c nelygiagreti su plokštuma α. Tarkime, kad tiesė c kerta plokštumą α viename taške M. Pagal 8 teoremą ir lygiagreti su ja tiesė b turi kirsti plokštumą α. Gavome prieštarą, kuri ir įrodo, kad tiesė c yra plokštumoje α.

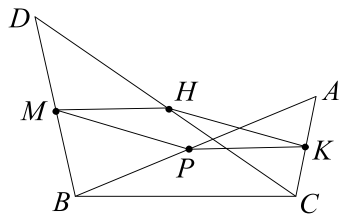
Jei a ir b – dvi prasilenkiančios tiesės, taškas A yra tiesėje a, tai pagal 6 teoremą per tašką A eina vienintelė tiesė c, lygiagreti su tiese b (3 pav.), tiesės a ir c yra vienoje plokštumoje (3 teorema). Tuomet kampas α tarp tiesių a ir c yra vadinamas kampu tarp tiesių a ir b. Akivaizdu, jog taip apibrėžtas kampas tarp prasilenkiančių tiesių nepriklauso nuo taško $A \in a$ parinkimo.



3 pav.



4 pav.



5 pav.

9 teorema. Jei tiesė a lygiagreti su tiese b, esančia plokštumoje α, bet pati tiesė a nėra plokštumoje α, tai tiesė a yra lygiagreti su plokštuma α (tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymis).

10 teorema. Jei plokštumos α ir β susikerta, tiesė a yra plokštumoje α ir ji lygiagreti su plokštuma β, tai tiesė a yra lygiagreti su plokštumų α ir β susikirtimo tiese.

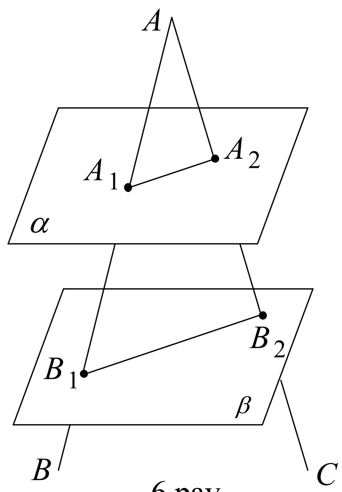
11 teorema. Jei plokštuma kerta dvi lygiagrečias plokštumas, tai susikirtimo tiesės yra lygiagrečios.

Sakykime, kad tiesė a kerta plokštumą α taške A (4 pav.). Iš bet kurio tiesės taško M nuleiskime statmenį į plokštumą α; šis statmuo kerta plokštumą α taške M', kuris vadinamas taško M ortogonaliąja projekcija plokštumoje α. Visų tiesės a taškų ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra tiesėje a', kuri vadinama tiesės a ortogonaliąja projekcija plokštumoje α. Kampas φ tarp tiesės a ir jos ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α yra vadinamas *kampu tarp tiesės a ir plokštumos α*.

2 pavyzdys. Trikampiai ABC ir DBC yra skirtingose plokštumose, kraštinė BC yra jų bendra kraštinė, taškai M, H, K yra atitinkamai atkarpų BD, CD, AC vidurio taškai (5 pav.). Per taškus M, H, K nubrėžta plokštuma kerta tiesę AB taške P. Įrodysime, kad atkarpos PH ir MK susikerta viename taške ir jame dalijasi pusiau.

Sprendimas. Kadangi taškai M ir H yra trikampio BCD kraštinių BD ir CD vidurio taškai, tai atkarpa MH yra šio trikampio vidurinė linija, todėl $BC \parallel MH$ ir $MH = \frac{1}{2}BC$. Plokštumoje, einančioje per taškus B, C, D yra tiesė MH, lygiagreti su plokštumos, einančios per taškus A, B, C tiese BC, todėl pagal 9 teoremą tiesė MH lygiagreti su plokštuma, einančia per taškus A, B, C. Lygiai taip pat plokštumoje, einančioje per taškus M, H, K yra tiesė MH, lygiagreti su plokštuma, einančia per taškus A, B, C, tai pagal 10 teoremą šių plokštumų sankirtos tiesė KP yra lygiagreti su tiese MH, todėl $BC \parallel KP$. Kadangi taškas K yra atkarpos AC vidurio taškas, tai atkarpa KP yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl $BC \parallel KP$ ir $KP = \frac{1}{2}BC$. Keturkampio $MPKH$ priešingos kraštinės MN ir KP yra lygios ir lygiagrečios, taigi šis keturkampis yra lygiagretainis. Iš čia ir išplaukia uždavinio tvirtinimas.

3 pavyzdys. Lygiagrečios plokštumos α ir β kampo BAC kraštinę AB kerta taškuose A_1 ir B_1, o to kampo kraštinę AC - taškuose A_2 ir B_2 (6 pav.). Rasime AB_1 ir A_2B_2, jei $A_1B_1 = 2A_1A$, $A_1B_1 = 12$, $AA_2 = 5$.



6 pav.

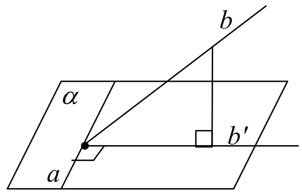
Sprendimas. Iš sąlygos gauname, kad $A_1A = \frac{1}{2}A_1B_1 = 6$. Taškai A, A_1, A_2, B_1, B_2 yra vienoje plokštumoje γ. Ši plokštuma kerta dvi lygiagrečias plokštumas α ir β lygiagrečiomis tiesėmis (11 teorema), taigi $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. Taikydami Talio teoremą gauname lygybę $\frac{AA_1}{A_1B_1} = \frac{AA_2}{A_2B_2}$, iš kurios išplaukia, kad $A_2B_2 = 10$.

Tiesė *a* yra vadinama statmena plokštumai α, jei ji statmena bet kuriai tos plokštumos tiesei.

11 teorema. Tiesė yra statmena plokštumai tada ir tik tada, kai ji statmena dviem susikertančioms tos plokštumos tiesėms.

12 teorema. Per bet kurį tašką A eina vienintelė tiesė a, statmena duotajai plokštumai α.

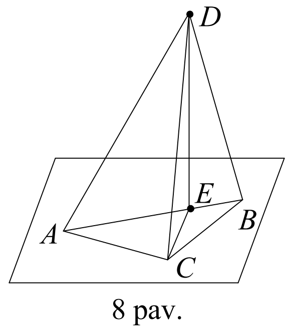
12 teorema (trijų statmenų teorema). Plokštumos tiesė a yra statmena tiesei *b* tada ir tik tada, kai ji statmena tiesės *b* ortogonaliajai projekcijai toje plokštumoje (7 pav.).



7 pav.

4 pavyzdys. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę, lygi 5, taškas D nėra trikampio plokštumoje ir nuo kiekvienos trikampio viršūnės nutolęs vienodu atstumu lygiu 10. Rasime taško D atstumą iki trikampio plokštumos.

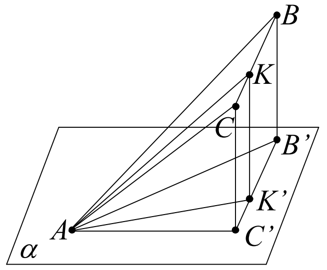
Sprendimas. Sakykime, kad taško D ortogonalioji projekcija trikampio ABC, $\angle C = 90^0$ plokštumoje yra taškas E, statieji trikampiai AED, BED, CED yra lygūs (jų statinis ED yra bendras, įžambinės $DA = DB = DC$ yra lygios pagal sąlygą). Iš trikampių lygumo išplaukia, kad $AE = EC = EB$, taigi taškas E yra vienodai nutolęs nuo trikampio ABC viršūnių, todėl jis yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras – įžambinės AB vidurio taškas. Iš čia išplaukia, kad atkarpa CE yra stačiojo trikampio ABC pusiaukraštinė, išvesta į įžambinę (8 pav.), taigi ieškomasis atstumas lygus $DE = \sqrt{DC^2 - CE^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.



8 pav.

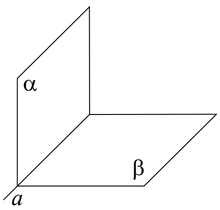
5 pavyzdys. Per smailiojo trikampio ABC viršūnę A išvesta plokštuma α, lygiagreti su tiese BC ir nutolusi nuo jos atstumu lygiu 5. Taškai B' ir C' yra taškų B ir C ortogonaliosios projekcijos plokštumoje α, $AB' = 13$, $AC' = 15$, $BC = 14$. Rasime trikampio ABC plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad atkarpa AK yra trikampio ABC aukštinė, o taškas K' yra taško K ortogonalioji projekcija plokštumoje α (9 pav.). Kadangi atkarpa $B'C'$ yra kraštinės BC ortogonalioji projekcija plokštumoje α, tai $BC = B'C' = 14$, atkarpų BB' ir CC' ilgiai lygūs plokštumos α atstumui iki tiesės BC, taškas K' yra atkarpoje $B'C'$, o atkarpa AK' yra aukštinės AK ortogonalioji projekcija šioje plokštumoje, $KK' = BB' = CC' = 5$. Kadangi tiesė BC yra statmena tiesei AK, tai pagal trijų statmenų teoremą ji statmena ir jos projekcijai - tiesei AK'. Kadangi tiesės BC ir $B'C'$ yra lygiagrečios, tai ir tiesė $B'C'$yra statmena tiesei AK', taigi atkarpa AK' yra trikampio $AB'C'$ aukštinė. Šios aukštinės ilgį rasime žymėdami $B'K' = x$, tuomet $C'K' = 14 - x$. Statiesiems trikampiams $AB'K'$ ir $AC'K'$ taikydami Pitagoro teoremą gauname, kad $AK'^2 = 13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$. Iš lygties $169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2$ randame, kad $x = 5$. $AK' = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $AK = \sqrt{AK'^2 + KK'^2} = \sqrt{12^2 + 5^3} = 13$, todėl ieškomasis plotas $S = \frac{1}{2}BC \cdot AK = 91$.

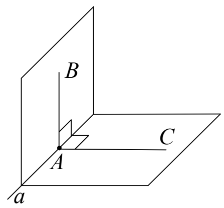


9 pav.

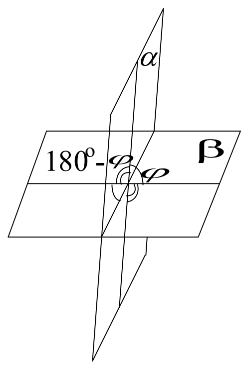
Dvisienį kampą sudaro dvi pusplokštumės, turinčios bendrą kontūro tiesę (10 pav.). Tos pusplokštumės vadinamos dvisienio kampo sienomis, o bendroji jų kontūro tiesė – dvisienio kampo briauna. Sakykime, kad dvisienio kampo briaunoje – tiesėje a – pažymime bet kurį tašką A ir kiekvienoje kampo sienoje išvedame spindulius AB ir AC, statmenus tiesei a (11 pav.). Kampas CAB yra vadinamas nagrinėjamo dvisienio kampo *tiesiniu kampu*. Visi dvisienio kampo tiesiniai kampai yra lygūs (t. y. nepriklauso nuo taško $A \in a$ parinkimo). Dvisienio kampo didumu vadinamas jo *tiesinio kampo didumas*.



10 pav.



11 pav.



12 pav.

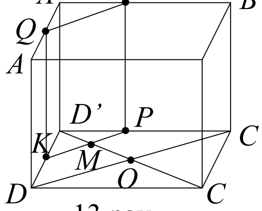
Dvi nelygiagrečios plokštumos α ir β sudaro keturis dvisienius kampus. Jei vieno jų didumas φ, tai kitų didumai lygūs $180^0 - \varphi$, φ, $180^0 - \varphi$ (12 pav.). Jei $\varphi = 90^0$, tai visi keturi kampai yra statieji, tuomet plokštumos α ir β yra statmenos.

13 teorema. Jei plokštumoje α yra tiesė a, statmena plokštumai β, tai plokštumos α ir β yra statmenos.

14 teorema. Jei plokštuma γ yra statmena dviem susikertančioms plokštumoms α ir β, tai ji yra statmena plokštumų α ir β sankirtos tiesei.

6 pavyzdys. Stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ siena $DD'C'C$ yra kvadratas, taškas M yra atkarpoje $D'C$ ir $D'M{:}\,MC = 1 : 5$. Nubrėšime gretasienio pjūvį plokštuma, einančia per tašką M ir statmena plokštumoms BCD' ir DCC'. Rasime gautojo pjūvio plotą, jei $DD' = 6, BD' = \sqrt{88}$.

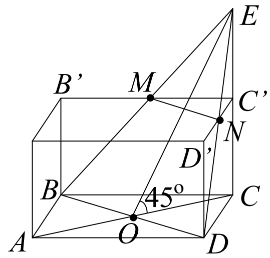
Sprendimas. Sprendžiant šį uždavinį patogiau nusibraižyti brėžinį taip, kad siena $DD'C'C$ būtų gretasienio pagrindas (13 pav.). Plokštumos $DCC'D'$ ir $BCD'A'$ yra statmenos, tiesė CD' yra jų sankirtos tiesė. Kadangi pjūvio plokštuma yra statmena plokštumoms $DCC'D'$ ir $BCD'A'$, tai ši plokštuma turi būti statmena tiesei CD' (14 teorema). Taigi pjūvio plokštumos ir gretasienio pagrindo plokštumos sankirtos tiesė yra statmena tiesei CD', taigi ji lygiagreti su tiese DC'. Todėl pjūvio plokštuma kerta pagrindo plokštumą $DD'C'C$ tiese KP, lygiagrečia su kvadrato įstrižaine DC', čia $K \in DD'$, $P \in C'D'$. Kadangi pjūvio plokštuma yra statmena gretasienio pagrindui $DCC'D'$, tai ji kerta sienas $ADD'A'$ ir $A'B'C'D'$ tiesėmis KQ ir PR, statmenomis plokštumai $DCC'D'$, čia $Q \in AA'$, $R \in A'B'$. Taigi ieškomasis pjūvis yra stačiakampis $KPRQ$. Iš stačiojo trikampio BCD' randame vieną šio stačiakampio kraštinę $KQ = CB = \sqrt{D'B^2 - D'C^2} = \sqrt{88 - (6\sqrt{2})^2} = 4$. Jei taške O



13 pav.

susikerta pagrindo įstrižainės DC' ir CD', o $D'M{:}MC = 1:5$, tai $D'M{:}D'C = 1{:}6$, $D'M{:}D'O = D'M{:}\frac{1}{2}D'C = 1{:}3$. Iš trikampių KMD' ir DOD' panašumo gauname, kad $KM : DO = KP : DC' = D'M{:}D'O = 1:3$, todėl $KP = \frac{1}{3}DC' = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Taigi ieškomasis plotas $S = 4\cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

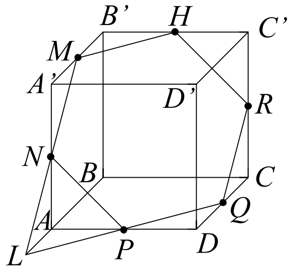
7 pavyzdys. Stačiakampio gretasienio pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 2, o gretasienio aukštinė lygi 1. Per pagrindo įstrižainę išvesta plokštuma, kuris su pagrindo plokštuma sudaro 45^0 kampą. Rasime gautojo pjūvio plotą.



14 pav.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ pagrindo $ABCD$ kraštinės $AB = AD = 2$, aukštinė $AA' = 1$. Sakykime, kad taškas O yra kvadrato $ABCD$ centras, per įstrižainę BD einanti pjūvio plokštuma kerta tiesę CC' taške E. Atkarpa OC yra atkarpos OE ortogonalioji projekcija pagrindo plokštumoje, o $OC \perp BD$, taigi pagal trijų statmenų teoremą išplaukia, kad $EO \perp BD$, todėl kampas EOC yra dvisienio kampo tarp pagrindo plokštumos ir pjūvio plokštumos tiesinis kampas, taigi $\angle EOC = 45^0$. Iš čia gauname, kad statusis trikampis EOC yra lygiašonis, $OC = EC = \sqrt{2} > CC' = 1$, taigi taškas E yra kraštinės CC' tęsinyje (14 pav.). Jei pjūvio plokštuma gretasienio kraštines $B'C'$ ir $D'C'$ kerta atitinkamai taškuose M ir N, tai trapecija $BDNM$ yra ieškomasis pjūvis. Kadangi trikampiai EMN ir EBD yra panašieji, tai $S_{EMN}{:}S_{EBD} = EM^2 : EB^2$. Iš trikampių EMC' ir EBC panašumo randame, kad $EM : EB = EC'{:}EC = (EC - CC'){:}EC = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, taigi $S_{EMN} = (\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})^2 S_{EBD}$. Kadangi $OE = \frac{OC}{\cos 45^0} = 2$, tai $S_{EBD} = \frac{1}{2}\cdot BD\cdot OE = 2\sqrt{2}$, todėl $S_{EMN} = (\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}})^2\cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 4$, o ieškomasis plotas $S = S_{EBD} - S_{EMN} = 2\sqrt{2} - (3\sqrt{2} - 4) = 4 - \sqrt{2}$.

8 pavyzdys. Taškai M, H ir P yra kubo $ABCDA'B'C'D'$ briaunų $A'B', B'C'$ ir AD vidurio taškai (15 pav.). Nubrėšime kubo pjūvį plokštuma, einančia per taškus M, H ir P. Įrodysime, kad plokštumos, einančios per taškus M, H, P ir B, D, D' yra statmenos. Rasime kubo kraštinės ilgį, jei gautojo pjūvio perimetras lygus $12\sqrt{2}$.



15 pav.

Sprendimas. Visų pirma nubrėšime duotąjį pjūvį. Kadangi pjūvio plokštuma dvi lygiagrečias plokštumas $ABCD$ ir $A'B'C'D'$ kerta lygiagrečiomis tiesėmis (11 teorema), tai per tašką P nubrėžę tiesę, lygiagrečią su tiese MH, gauname jos sankirtos su tiese CD tašką Q, kuriame pjūvio plokštuma kerta tiesę CD, o gretasienio sieną $ABCD$ pjūvio plokštuma kerta tiese PQ. Tiesių AB ir PQ sankirtos taškas L yra taškas, kuriame pjūvio plokštuma kerta gretasienio briauną AB, o tiesių AA' ir ML sankirtos taškas N yra pjūvio plokštumos ir briaunos AA' sankirtos taškas. Kadangi pjūvio plokštuma lygiagrečias plokštumas $ABB'A'$ ir $DCC'D'$ kerta lygiagrečiomis tiesėmis, tai nubrėžę tiesę QR, lygiagrečią su tiese NM, gauname pjūvio plokštumos ir kubo briaunos CC' sankirtos tašką R. Taigi šešiakampis $MHRQPN$ yra ieškomasis pjūvis. Pažymėkime kubo kraštinės ilgį x. Kadangi $PQ \parallel MH \parallel A'C' \parallel AC$, tai atkarpa PQ yra trikampio ADC vidurinė linija, taigi $DQ = \frac{x}{2}$. Stačiųjų trikampių PDQ ir PAL statiniai PD ir PA yra lygūs, smailieji kampai prie viršūnės P irgi lygūs, todėl iš šių trikampių lygumo gauname, kad $AL = DQ = \frac{x}{2}$. Analogiškai iš stačiųjų trikampių NAL ir $NA'M$ lygumo randame, kad $AN = NA' = \frac{x}{2}$. Kadangi $DR \parallel NM \parallel AB' \parallel DC'$, tai $CR = RC' = \frac{x}{2}$. Taigi taškai Q, R, N yra kubo briaunų DC, CC', AA' vidurio taškai, todėl visos pjūvio kraštinės yra lygios kubo sienos įstrižainės pusei $\frac{x\sqrt{2}}{2}$. Pagal sąlygą šešiakampio perimetras $6\cdot\frac{x\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$, taigi $x = 4$. Kadangi plokštumos, einančios per taškus M, H, P, tiesė HM yra statmena dviem plokštumos BDD' tiesėms $B'D'$ ir BB', tai pagal 11 teoremą tiesė HM yra statmena plokštumai BDD'. Tuomet pagal 13 teoremą plokštumos MHP ir BDD' yra statmenos.

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Tiesės a ir b yra lygiagrečios, tiesė a kerta plokštumą α taške A, tiesė c yra lygiagreti su tiese b. Ar tiesė c gali priklausyti plokštumai α? Atsakymą pagrįskite.

2. Tiesė a kerta plokštumą, einančią per taškus A, B ir C, taške A. Taškai M ir N yra tiesėje a, o tsaškai P ir Q – tiesėje BC. Nustatykite tiesių MP ir NQ tarpusavio padėtį.

3. Trikampis ADP ir trapecija $ABCD, BC \parallel AD$ yra skirtingose plokštumose, jie turi bendrą kraštinę AD. Per trapecijos pagrindą BC ir atkarpos PD vidurio tašką K išvesta plokštuma, kuri kerta atkarpą AP taške M. Raskite atkarpos MK ilgį, jei $AD = 10$.

4. Dviejų atkarpų, esančių tarp lygiagrečių plokštumų, ilgių santykis yra $2:3$, o kampų, kuriuos šios atkarpos sudaro su minėtomis plokštumomis, didumų santykis lygus $1:2$. Raskite tuos kampus.

5. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = BC = 10$, $AC = 12$, taškas K yra vienodai nutolęs nuo tiesių AB, BC, AC, jo atstumas iki trikampio plokštumos lygus 4. Raskite atstumą nuo taško K iki tiesių AB, BC, AC.

6. Rombo $ABCD$ kraštinės ilgis lygus 4, kampas A lygus 60^0. Nubrėžta rombo plokštumai statmena atkarpa AE, taško E atstumas iki tiesės CD lygus 4. Raskite atstumą nuo taško E iki rombo plokštumos.

7. Per trikampio MHP viršūnę M išvesta plokštuma β lygiagreti su tiese HP ir nutolusi nuo šios tiesės atstumu lygiu $\sqrt{15}$. Taškai G ir Q yra atitinkamai taškų H ir P ortogonaliosios projekcijos plokštumoje β. Raskite trikampio MGQ plotą, jei $MH = 17, PM = 10, HP = 9$.

8. Stačiakampio gretasienio $ABCDA'B'C'D'$ pagrindas $ABCD$ yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis lygus 4, gretasienio įstrižainės AC' ilgis lygus $4\sqrt{6}$. Pagrindo įstrižainėje AC yra taškas K toks, kad $AK : KC = 1 : 3$. Nubrėžkite gretasienio pjūvį plokštuma, einančia per tašką K ir statmena plokštumoms ABC ir $AA'C$. Apskaičiuokite gautojo pjūvio plotą.

9. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 1 ir 2, o gretasienio aukštinė lygi 3. Per pagrindo įstrižainę išvesta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro 60^0 kampą. Raskite gautojo pjūvio plotą.

10. Kubo $ABCDA'B'C'D'$ įstrižainės AC' ilgis lygus $2\sqrt{3}$, taškai M, H ir P yra briaunų $B'C', D'C'$ ir DD' vidurio taškai. Nubrėžkite kubo pjūvį plokštuma, einančia per taškus M, H, P ir suraskite šio pjūvio perimetrą

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2022 m. kovo 25 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA