I. TEKSTINIAI UŽDAVINIAI

(2021–2023)

Teorinę medžiagą parengė bei pirmąją užduotį sudarė mokytojas ekspertas Kazimieras Pulmonas

Kartais jie įvardijami sąlyginiais ar žodiniais uždaviniais. Juos sprendžiant visų pirma labai svarbu gerai ir atidžiai perskaityti situacijos tekstą, dažnai ir kelis kartus, įsigilinti ir išsiaiškinti ką užduotis reikalauja atlikti, rasti ar nustatyti. Nereikia skubėti su sprendimu. Nepanikuoti. Po to, remiantis duomenimis, susidaryti loginį problemos sprendimo planą. Tam pasitarnauja paprasčiausios turimų duomenų sąryšio schemos.

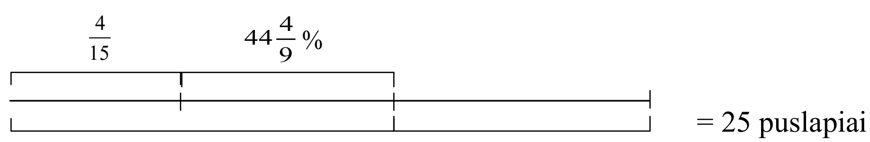
Suprantama, svarbūs kartu baziniai ir tipiniai įvairūs skaičiaus dalies ir viso skaičiaus, iš jo dalių radimo, proporcingosios dalybos, skirtingų judėjimo rūšių sausumoje ir upėje, bendro darbo, procentų, lydinių ir mišinių skaičiavimo praktiniai mokėjimai ir įgūdžiai, kaupiami mokantis matematikos mokykloje.

Iki praeito amžiaus aštuntojo dešimtmečio Lietuvos mokyklų 1 – 6 klasėse vyravo tekstinių uždavinių sprendimo aritmetiniu būdu metodika. Buvo šiose klasėse ir toks dalykas – aritmetika. Dabar kai kurie tekstiniai uždaviniai jau ir pradinėse klasėse sprendžiami algebriniu būdu. Praktikuojama matematikos mokymo metodika: svarbu problemą išspręsti, nesuteikiant svarbos ir pirmenybės sprendimo būdui. Sprendžiama patogiausiu, sprendėjui priimtiniausiu būdu.

Taigi, jeigu spręsdami tam tikrą problemą remiamės vien tik duomenų sąryšingumu ir tik jų sąsajomis bei dėsningumais, turime aritmetinį sprendimo būdą, o jei matematiškai modeliuojame lygtį, nelygybę ar lygčių ar nelygybių sistemą bei pasitelkiame diferencialinio ar integralinio skaičiavimo elementus, tai taikome algebrinį sprendimo būdą. Vienu ar kitu atveju labai svarbios čia ne tik turimos žinios iš matematikos, bet iš fizikos, chemijos, ekonomikos, o taip pat ir kitų mokslų. Galimas ir priimtinas uždavinių sprendimo taip vadinamas perrankos metodas.

1 pavyzdys. Berniukas iš pradžių perskaitė $\frac{4}{15}$ visos knygos, paskui dar $44\frac{4}{9}$ % likusios dalies. Po to paaiškėjo, kad jis perskaitė 25 puslapius daugiau, negu liko skaityti. Kiek puslapių yra knygoje?

Sprendimas.



I būdas (*Aritmetinis*). Perskaičius $\frac{4}{15}$ knygos berniukui liko skaityti $1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$ (knygos)$\cdot 44\frac{4}{9}$ % likusios skaityti knygos dalis yra $\frac{11}{15}\cdot\frac{44\frac{4}{9}}{100}=\frac{11}{15}\cdot\frac{4}{9}=\frac{44}{135}$ (knygos). Liko dar neperskaityta $\frac{11}{15}-\frac{44}{135}=\frac{55}{135}=\frac{11}{27}$ (knygos), o berniukas perskaitė $\frac{4}{15}+\frac{44}{135}=\frac{80}{135}=\frac{16}{27}$ (knygos). Perskaitytos ir neperskaitytos knygos dalių skirtumas yra $\frac{16}{27}-\frac{11}{27}=\frac{5}{27}$. Kadangi $\frac{5}{27}$ knygos yra 25 puslapiai, tai knygoje yra $25:\frac{5}{27}=25\cdot\frac{27}{5}=135$ (puslapiai).

II būdas (*Algebrinis*). Sakykime knygoje yra *x* puslapių, tai berniukas pradžioje perskaitė $\frac{4}{15}$x puslapių, o paskui $\left(x-\frac{4}{15}x\right)\cdot\frac{44\frac{4}{9}}{100}=\frac{44x}{135}$ (puslapių). Liko perskaityti $x-\frac{4x}{15}-\frac{44x}{135}=\frac{135x-36x-44x}{135}=\frac{55x}{135}=\frac{11x}{27}$ (puslapių). Pagal sąlygą:

$\frac{4x}{15}+\frac{44x}{135}-\frac{11x}{27}=25\Big|\cdot 135;\quad 36x+44x-55x=25\cdot 135;\quad 25x=25\cdot 135$ ir $x=135.$

Ats.: 135 puslapiai.

2 pavyzdys. Iš indo, kuriame yra 40 l tam tikro stiprumo rūgšties, iš pradžių nupilta $\frac{3}{5}$ visos rūgšties kiekio ir pripilta tiek pat vandens. Ši procedūra pakartota dar du kartus. Kiek litrų pirmykščio stiprumo rūgšties liko inde, nupylus trečią kartą?

Sprendimas. Po pirmo nupylimo inde liko $40\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=40\cdot\frac{2}{5}=16$ (l) pirmykščio stiprumo rūgšties, po antro – $16\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=16\cdot\frac{2}{5}=6{,}4$ (l), o po trečio – $6{,}4\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)=6{,}4\cdot\frac{2}{5}=2{,}56$ (l).

Atsakymas;2,56 l.

3 pavyzdys. Nedžiovintų grūdų drėgnumas buvo lygus 23 %, o pradžiovintų – 12 %. Kiek procentų sumažėjo grūdų svoris juos pradžiovinus?

Sprendimas. Jei paimtume, pavyzdžiui, 100 kg nedžiovintų grūdų, tai sausųjų medžiagų juose būtų $100\cdot\frac{100-23}{100}=77$ (kg). Šios sausosios medžiagos, grūdus džiovinant, niekur nedingo, bet pradžiovintuose javuose jos jau sudaro $100-12=88$ (%), todėl pradžiovintų javų svorį x surandame iš schemos:

$$\begin{array}{l} 77\text{ kg } - \ 88\,\%; \\ x\text{ kg } - \ 100\,\%; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 1\%\ \text{ atitinka } \dfrac{77}{88}\text{ kg;} \\ 1\%\ \text{ atitinka } \dfrac{x}{100}\text{ kg.} \end{array}$$

Todėl $\frac{x}{100}=\frac{77}{88}$ ir $x=\frac{77\cdot100}{88}=\frac{700}{8}=87{,}5$ (kg).

Vadinasi, grūdų svoris sumažėjo $100-87{,}5=12{,}5$ (kg), t.y. 12,5 %.

Ats.: 12,5 %.

4 pavyzdys. Statybos darbų apimtis padidėjo 80 %. Keliais procentais reikės padidinti darbininkų skaičių, jeigu darbo našumas bus padidintas 20 %?

Sprendimas.

I būdas (Aritmetinis). Jeigu pradinę statybos darbų apimtį laikytume lygia 100, o darbininkų darbo našumą, iki jis padidės, lygiu irgi 100 vienetų, tai nauja darbų apimtis yra 180, o darbo našumas – 120 vienetų. Darbininkų reikės naujoje situacijoje $\frac{180}{120}=1{,}5$ (buvusio) poreikio, t. y. 50 % daugiau.

II būdas (Algebrinis). Sakykime pradinė statybos darbų apimtis buvo a, o darbininkų darbo našumas – b, tai darbininkų poreikis buvo $\frac{a}{b}$. Naujos situacijos statybos darbų apimtis 1,8a, o darbininkų darbo našumas 1,2b. Vadinasi, darbininkų naujas poreikis yra $\frac{1{,}8a}{1{,}2b}=1{,}5\frac{a}{b}$ buvusio poreikio, t. y. 50 % didesnis.

Atsakymas 50

5 pavyzdys. Kiek sidabro 500-osios prabos ir 800-osios prabos reikia sulydyti, norint gauti 225 g sidabro lydinį, kurio praba yra 720?

Sprendimas. Jeigu 500-osios prabos sidabro reikia x g, tai jame yra $\frac{x\cdot500}{1000}=0{,}5x$ (g) gryno sidabro, o tuomet 800-osios prabos sidabro lydiniui reikia $(225-x)$ g ir jame yra $\frac{(225-x)\cdot800}{1000}=0{,}8(225-x)$ g gryno sidabro. 720-osios prabos 225 g sidabro lydinyje gryno sidabro yra $\frac{225\cdot720}{1000}=162$ (g).

Pagal sąlygą: $0{,}5x+0{,}8(225-x)=162;\ \ 0{,}5x+180-0{,}8x=162$ ir $x=60$.

Taigi 500-osios prabos sidabro reikia 60 g, o 800-osios prabos $225-60=165$ (g).

Uždavinį buvo galima spręsti ir kitaip.

Jeigu 500-osios prabos sidabro reikia paimti x gramų, tai 800-osios prabos – y gramų. Tuomet pagal sąlygą būtume sudarę lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+y=225, \\ 0{,}5x+0{,}8y=162; \big| \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=225, \\ x+1{,}6y=324; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}6y=99, \\ x+y=225; \end{cases} \Rightarrow y=165, \text{ o } x=60.$$

Ats.: 60 g ir 165 gramus.

Sprendžiant pirmuoju atveju uždavinio sprendimo matematinis modelis yra lygtis $0{,}5x+0{,}8(225-x)=162$, o antruoju – lygčių sistema $\begin{cases} x+y=225, \\ 0{,}5x+0{,}8y=162. \end{cases}$

6 pavyzdys. 125 m ilgio traukinys pro stulpą, esantį šalia geležinkelio, pravažiuoja per $\frac{1}{12}$ min, o per upę esantį tiltą pervažiuoja per 2,8 karto ilgesnį laiką. Koks yra tilto ilgis?

Sprendimas. $\frac{1}{12}\text{ min}=5\text{ s}$. Traukinio važiavimo greitis $125:5=25\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$. Traukinys, pervažiuodamas tiltą (traukinio priekis pasiekia tilto pradžią, važiuoja tiltu, traukinio galas nuvažiuoja nuo tilto), nuvažiuoja kelią lygų $25\cdot 5\cdot 2{,}8=350$ (m). Kadangi traukinio ilgis 125 m, tai tilto ilgis $350-125=225$ (m).

Ats.: 225 m.

7 pavyzdys. Apskaičiuokite motorinės valties, kurios pradinė vertė 5000 Eur, likutines vertes per pirmuosius ketverius metus, jei kasmet valties vertė sumažėja 15 % buvusios vertės. Raskite motorinės valties vertę po 10 metų.

Sprendimas. Motorinės valties likutines vertes per pirmuosius ketverius metus galime apskaičiuoti paprasčiausiai prieš metus buvusią (likutinę) vertę daugindami iš skaičiaus $1-\frac{15}{100}=0{,}85$.

Todėl valties vertė:

pirmaisiais metais – 5 000 (Eur);

antraisiais metais – $5\,000\cdot 0{,}85=4\,250$ (Eur);

trečiaisiais metais – $4\,250\cdot 0{,}85=3\,612{,}5$ (Eur);

ketvirtaisiais metais – $3\,612{,}5\cdot 0{,}85=3\,070{,}63$ (Eur).

Susiduriame su sudėtiniais procentais. Todėl valties likutinę vertę galime apskaičiuoti pasinaudoję sudėtinių procentų formule: $b_n=b_1\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$.

Motorinės valties vertė po 10 metų, t. y. vienuoliktaisiais metais bus

$$5\,000\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right)^{11-1}=5\,000\cdot 0{,}85^{10}=984{,}37 \text{ (Eur).}$$

Ats.: 5 000 Eur, 4 250 Eur, 3 612,5 Eur, 3 070,63 Eur;984,37 Eur.

8 pavyzdys. Kiek mažiausiai kartų po 5 % reikia sumažinti prekės kainą, kad ji atpigtų ne mažiau kaip perpus?

Sprendimas. Jeigu prekės pradinė kaina a, tai pagal sąlygą:

$$a\left(1-\frac{5}{100}\right)^n\le\frac{a}{2},\quad \left(1-\frac{5}{100}\right)^n\le 0{,}5 \quad \text{ir} \quad 0{,}95^n\le 0{,}5.$$

Šią rodiklinę nelygybę paprasčiausia spręsti skaičiuokliu. Turime $n\ge 14$. Susipažinusiems su logaritmais šios nelygybės sprendimas: $n\ge\log_{0{,}95}0{,}5=\frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}95}=13{,}51346...$, $n\ge 14$.

Ats.: 14 kartų.

9 pavyzdys. Šeimos pajamos kovo mėnesį buvo 1 248,48 Eur ir per visus šiuos kalendorinius metus didėjo kas mėnesį po 2 %. Apskaičiuokite šios šeimos pajamas per kalendorinius metus.

Sprendimas. Jeigu šeimos pajamos sausio mėnesį buvo x Eur, tai pagal sąlygą: $x\cdot 1{,}02^2=1\,248{,}48$ ir iš čia $x=1\,248{,}48:1{,}0404$, todėl $x=1\,200$ Eur. Šeimos pajamos per metus atitinka geometrinės progresijos, kurios pirmasis narys $b_1 = 1\,200$, o vardiklis $q = 1 + \frac{2}{100} = 1{,}02$, pirmųjų dvylikos narių sumą S_{12}. Dvyliktasis narys yra $b_{12} = 1\,200 \cdot 1{,}02^{12-1} = 1\,200 \cdot 1{,}02^{11} = 1\,492{,}0486 \approx 1\,492{,}05$.

Pagal formulę $S_{12} = \frac{b_{12} \cdot q - b_1}{q-1}$ turime:

$$S_{12} = \frac{1\,492{,}05 \cdot 1{,}02 - 1\,200}{1{,}02 - 1} = \frac{1\,521{,}891 - 1\,200}{0{,}02} \approx 16\,094{,}5 \text{ (Eur).}$$

Ats.: $\approx 16\,094{,}5$ Eur.

10 pavyzdys. Šeimoje yra penki vaikai. Keturi iš jų atitinkamai dviem, šešiais, aštuoniais ir dvylika metų yra vyresni už jauniausiąjį. Kiek metų yra jaunėliui, jei kiekvieno kito vaiko metų skaičius yra pirminis skaičius ir nedidesnis už 30.

Sprendimas. Pasinaudokime perrankos metodu. Pagal sąlygą akivaizdu, kad jauniausio vaiko metų skaičius yra nelyginis. Jei jaunėliui yra:

- vieneri, tai kitiems vaikams yra 3 m., 7 m., 9 m. ir 13 m. (9 – sudėtinis skaičius, tai sąlyga netenkinama);
- 3 metai, tai kitiems dviems – 9 m. ir 15 m. (netinka);
- 5 metai, tai kitiems – 7m., 11 m., 13 m. ir 17 m. (tinka);
- 7 metai, tai kitiems dviems – 9 m., ir 15 m. (netinka);
- 9 metai, tai kitiems dviems – 15 m. ir 21 m. (netinka);
- 11 metų, tai kitiems dviems – 13 m., 17 m., 19 m. ir 23 m. (tinka);
- 13 metų, tai kitiems trims – 15 m., 21 m. ir 27 m. (netinka);
- 15 metų, tai kitiems dviems – 21 m. ir 27 m. (netinka);
- 17 metų, tai vienam – 25 m. (netinka);
- 19 metų, tai vienam jau 31 m. ir sąlyga netenkinama.

Ats.: 5 m. arba 11 m.

PIRMOJI UŽDUOTIS

1. Iš verdančio virdulio nupilta $\frac{2}{3}$ vandens, o į likusį vandenį virdulyje pripilta tiek pat kiek nupilta 16°C temperatūros vandens. Raskite sumaišyto vandens temperatūrą virdulyje.

2. 50 g 560-osios prabos aukso sulydyta su nežinomos prabos aukso lydiniu ir gauta 300 g. 760-osios prabos aukso lydinys. Raskite antrojo lydinio aukso prabą.

3. (Sąmojo uždavinys). Valstietis, važiuodamas į pievas šieno, pasiėmė tris sūnus: 15 metų, 12 metų ir 10 metų amžiaus. Grįždamas atgal su šienu, 13,5 km kelią berniukai iš eilės važiavo ant vežimo, kiekvienas savo amžiui atvirkščiai proporcingą nuotolį. Kiek kilometrų kiekvienas berniukas važiavo ant vežimo?

4. Laikrodis rodo vidurdienį. Po kiek mažiausiai laiko valandinė rodyklė vėl sutaps su minutine rodykle?

5. Darbininko darbo našumas pakilo 20 %, Kiek procentų sutrumpės laikas tam pačiam darbui atlikti?

6. Naujai iškasta akmens anglis yra 2 % drėgnumo. Po tam tikro laiko anglis dar įsiurbia tam tikrą kiekį drėgmės ir jau yra 15 %. Kiek padidės, atsižvelgiant į tai, naujai iškastos $13\frac{3}{8}$ tonos anglies svoris (tūkstantosios tikslumu)?

7. Miško sklype medienos prieaugis per metus sudarė 10 %. Medienos kiekis sklype dabar apytiksliai lygus $8{,}50 \cdot 10^4$ m^3. Kiek kubinių metrų medienos šiame sklype

a) buvo prieš keturis metus? b) bus po 5 metų?

Nurodymas. Atsakymus pateikite standartine skaičiaus išraiška $a \cdot 10^n$, skaičių a parašę šimtosios tikslumu.

8. Po aštuonerių metų iš 8 000 Eur palikimo sumos buvo likę 31,25 Eur. Po kiek tų pačių procentų likusios sumos išleido kasmet paveldėtojas?

9. Trys seserys pintinaitę gautų slyvų pasidalijo šitaip: pirmoji pasiėmė $\frac{1}{3}$ visų slyvų ir dar 8 slyvas, antroji pasiėmė $\frac{1}{3}$ likusiųjų ir dar 8 slyvas, trečioji pasiėmė vėl $\frac{1}{3}$ antrą kartą likusių slyvų ir dar paskutines 8 likusias slyvas. Kiek slyvų gavo kiekviena sesuo?

10. Išilgai geležinkelio sankasos eina takelis. 110 m ilgio traukinys važiavo 30 km/h greičiu. 14 val. 10 min. traukinys pasivijo einantį keleivį ir pravažiavo pro jį per 15 sekundžių. 14 val. 16 min. tas pats traukinys susitiko kitą keleivį ir pro jį pravažiavo per 12 sekundžių. Raskite kiekvieno keleivio greitį ir keleivių susitikimo laiką, jeigu keleiviai ėjo pastoviais greičiais.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2021 m. gruodžio 15 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA