13-osios matematinės varžybos
Lietuvos Didžiosios Kunigaikštystės garbei

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Imkime $h(x) = x + 1$. Pakanka įrodyti tokį teiginį: kiekvienam daugianariui $f(x)$ egzistuoja toks daugianaris $g(x)$, kad $g(x + 1) - g(x) = f(x) + 1$. Šį teiginį įrodysime matematinės indukcijos būdu pagal daugianario $f(x)$ laipsnį n.

   Kai $n = 0$ arba $f(x) = 0$, tai $f(x) + 1 = c$, kur c yra tam tikra konstanta. Tada galima pasirinkti $g(x) = cx$:

   $$g(x + 1) - g(x) = c(x + 1) - cx = c = f(x) + 1.$$

   Tarkime, kad $n \in \mathbb{N}$, o teiginys teisingas visiems daugianariams, kurių laipsnis yra mažesnis už n (ir nuliniam daugianariui). Nagrinėkime bet kokį daugianarį $f(x)$, kurio laipsnis lygus n, ir įrodykime teiginį jam. Pastebėkime, kad jei $g_0(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, tai daugianario

   $$g_0(x + 1) - g_0(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (x^{n+1} + (n + 1)x^n + \ldots - x^{n+1}) = x^n + \ldots$$

   laipsnis lygus n, o vyriausiasis koeficientas lygus 1. Daugianario $f(x)$ vyriausiąjį koeficientą pažymėkime a. Tada

   $$f(x) + 1 = ax^n + \ldots = ag_0(x + 1) - ag_0(x) + f_1(x) + 1,$$

   kur daugianario $f_1(x)$ laipsnis yra mažesnis už n (arba $f_1(x) = 0$). Remiantis indukcijos prielaida, egzistuoja toks daugianaris $g_1(x)$, kad $g_1(x + 1) - g_1(x) = f_1(x) + 1$. Tada $f(x) + 1 = g(x + 1) - g(x)$, kur $g(x) = ag_0(x) + g_1(x)$. Tai įrodo teiginį daugianariui $f(x)$.

   Įrodyta.

2. Ats. Tai įmanoma, esant bet kokiam pradiniam nuspalvinimui.

   Alisa gali iš eilės atlikti tokius ėjimus, kai $n = 2021, 2020, 2019, \ldots, 4, 3$: pasirenkami skaičiai n, $n - 1$, $n - 2$ ir, jei skaičius n tuo metu yra baltas, pakeičiamos šių skaičių spalvos. Po šių ėjimų visi skaičiai $n = 2021, 2020, 2019, \ldots, 4, 3$ tampa juodi.

Jei skaičius 2 po šių ėjimų taptų baltas, tai Alisa toliau galėtų pasirinkti skaičių trejetus 2, 5, 8; 5, 6, 7; 6, 7, 8 ir kaskart pakeisti skaičių spalvas. Skaičiai 5, 6, 7, 8 liktų juodi, o skaičius 2 taptų juodas.

Pagaliau, jei skaičius 1 po atliktų ėjimų būtų baltas, tai Alisa galėtų pasirinkti skaičių trejetus 1, 4, 7; 4, 5, 6; 5, 6, 7 ir kaskart pakeisti skaičių spalvas. Skaičiai 4, 5, 6, 7 liktų juodi, o skaičius 1 taptų juodas.

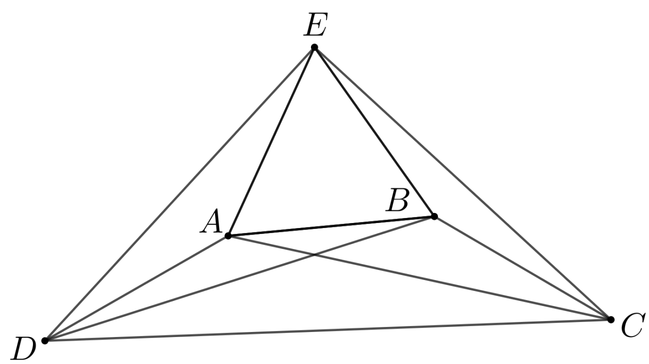
Taigi Alisa visada gali padaryti visus skaičius juodus.

3. Pažymėkime tokį tašką E, kad trikampis ABE būtų lygiakraštis, o atkarpa CE kirstų tiesę AB. Trikampių ABC ir ABD kampų suma lygi

$$360^\circ = (\angle ADB + \angle ACB) + (\angle CAB + \angle DBA) + \angle ABC + \angle BAD =$$

$$= 60^\circ + \angle ABC + \angle BAD, \qquad \angle ABC + \angle BAD = 300^\circ > 180^\circ + 90^\circ.$$

Taigi kampai ABC ir BAD abu yra bukieji (žr. pav.).



Kadangi

$$\angle EAD = 360^\circ - 60^\circ - \angle BAD = 300^\circ - \angle BAD = \angle ABC,$$

$$AD = BC, \qquad AE = BA,$$

tai $\triangle EAD = \triangle ABC$. Analogiškai, $\triangle EBC = \triangle BAD$. Vadinasi, $ED = AC$ ir $EC = BD$. Taigi iš atkarpų AC, BD ir CD galima sudėti trikampį CED. Šis trikampis statusis, nes

$$\angle CED = \angle BEC + \angle AEB + \angle AED = \angle ABD + 60^\circ + \angle BAC = 90^\circ.$$

Įrodyta.

4. Ats. a) Pavyzdžiui, $(x, y, z) = (13, 22, 2)$.

   Tarkime, kad x yra bet kuris pirminis aritmetinės progresijos 13, 21, 29, … narys ir kad $z = 2$. Tada skaičius $y = \frac{x^3-2021}{8}$, su šiomis x bei z reikšmėmis tenkinantis duotąją lygtį $x^3 - yz^3 = 2021$, yra natūralusis. Iš tiesų, $x \equiv 5 \pmod 8$ ir $x^3 - 2021 \equiv 5^3 - 2021 \equiv 0 \pmod 8$, todėl skaičius y yra sveikasis. Be to, $x^3 - 2021 \geqslant 13^3 - 2021 > 0$, todėl $y > 0$.

   Taigi gavome duotosios lygties sprendinį (x, y, z). Tokių sprendinių yra be galo daug, nes, remiantis Dirichlė teorema apie aritmetines progresijas, progresijoje 13, 21, 29, … yra be galo daug pirminių skaičių x. Atskiru atveju galime pasirinkti $x = 13$, $z = 2$, $y = \frac{13^3-2021}{8} = 22$. Taip gauname sprendinį $(x, y, z) = (13, 22, 2)$.