XXXV Lietuvos komandinė mokinių matematikos olimpiada prof. Jono Kubiliaus taurei laimėti

Atsakymai, sprendimai

Parengė Aivaras Novikas

1. Ats. $(1,-1)$, $(-2\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2})$.

   Sudėję lygtis, gauname kvadratinę lygtį $2x+y$ atžvilgiu:

$$3(2x+y)+(2x+y)^2=4.$$

   Taigi $2x+y=-4$ arba $2x+y=1$. Pirmuoju atveju $-3=2y+2xy+y^2=$ $=y^2+2y+(-y-4)y=-2y$, $y=\frac{3}{2}$, $x=(-y-4)/2=-\frac{11}{4}$. Antruoju atveju $-3=2y+2xy+y^2=y^2+2y+(1-y)y=3y$, $y=-1$, $x=(1-y)/2=1$. Abu gauti sprendiniai tenkina duotąją sistemą.

2. Ats. $(2,4)$.

   Atimkime antrąją lygtį iš pirmosios ir išskirkime pilnus kvadratus:

$$-12=x^2-xy+y^2-6y=\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+3\left(\frac{y^2}{4}-2y+4\right)-12=$$

$$=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-2\right)^2-12,\qquad \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-2\right)^2=0.$$

   Taigi $x-\frac{y}{2}=0$, $\frac{y}{2}-2=0$ ir todėl $y=4$, $x=2$. Gautas sprendinys tenkina duotąją sistemą.

3. Ats. $f(x)=cx$, $x\in\mathbb{R}$, kur $c\in\mathbb{R}$ – duotas skaičius.

   Atskirai įrašę duotojoje lygtyje $x=0$ ir $y=0$, gauname $f(x^3)=$ $=x^2f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, ir $f(y^3)=yf(y^2)$, $y\in\mathbb{R}$. Todėl $f(0)=0$ ir

$$f(x^3+y^3)=x^2f(x)+yf(y^2)=f(x^3)+f(y^3),\ x,y\in\mathbb{R}.$$

   Lygybėje $f(x^3+y^3)=f(x^3)+f(y^3)$ vietoj x ir y įrašę $\sqrt[3]{x}$ ir $\sqrt[3]{y}$, gauname

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ x,y\in\mathbb{R}.$$

   Turime $x^2f(x)=f(x^3)=xf(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$, todėl $f(x^2)=xf(x)$, kai $x\neq 0$, ir $f(x^2)=0=xf(x)$, kai $x=0$. Vadinasi,

$$f(x^2+2x+1)=f(x^2)+f(x)+f(x)+f(1)=$$

$$=xf(x)+2f(x)+f(1),\ x\in\mathbb{R},$$

$$f(x^2+2x+1) = (x+1)f(x+1) =$$
$$= xf(x) + xf(1) + f(x) + f(1),\ x \in \mathbb{R},$$
$$xf(x) + 2f(x) + f(1) = xf(x) + xf(1) + f(x) + f(1),\ x \in \mathbb{R},$$
$$f(x) = xf(1),\ x \in \mathbb{R}.$$

Taigi tiesinės funkcijos $f(x) = cx$, $x \in \mathbb{R}$, yra vieninteliai galimi sprendiniai. Bet kuri tokia funkcija tenkina duotąją lygtį: $c(x^3 + y^3) = x^2 \cdot cx + y \cdot cy^2$.

4. Ats. 4.

Pastebėkime, kad

$$(x^3+1)(y^3+1) = x^3y^3 + 1 + (x+y)(x^2 - xy + y^2) =$$
$$= (xy)^3 + 1 + (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3a + 2,$$

kur $a = xy$.

Kai $a = -1$, tai $a^3 - 3a + 2 = 4$. Ši reikšmė 4 įgyjama, kai $x + y = 1$, $xy = -1$, t. y. kai x ir y yra lygties $z^2 - z - 1 = 0$ sprendiniai $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Taigi ieškoma didžiausia reikšmė yra ne mažesnė už 4.

Įrodysime, kad $a^3 - 3a + 2 \leqslant 4$. Kadangi

$$4a = 4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2 \leqslant (x+y)^2 = 1,$$

tai $a \leqslant \frac{1}{4}$. Įrodymą galima užbaigti, tiriant funkcijos $f(a) = a^3 - 3a + 2$ išvestinę, kai $a \in (-\infty, \frac{1}{4}]$. Tačiau tai nebūtina. Jei $a < 0$, tai

$$-a^3 + 2 = (-a^3) + 1 + 1 \geqslant 3\sqrt[3]{(-a^3) \cdot 1 \cdot 1} = -3a$$

(aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybė) ir $a^3 - 3a + 2 \leqslant a^3 + (-a^3 + 2) + 2 = 4$. O jei $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$, tai $a^3 - 3a + 2 \leqslant \frac{1}{4^3} - 3 \cdot 0 + 2 < 4$.

Vadinasi, skaičiaus $(x^3+1)(y^3+1) = a^3 - 3a + 2$ didžiausia galima reikšmė yra ne didesnė už 4. Ji yra ir ne mažesnė už 4, todėl ji lygi 4.

5. Pastebėkime, kad

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + 2 \geqslant 2 \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} + 2 = 2 \cdot \frac{x}{z} + 2 = 2 \cdot \frac{x+z}{z} =$$
$$= 2 \cdot \frac{(x+z)^2}{z(x+z)} \geqslant 2 \cdot \frac{4xz}{z(x+z)} = 2 \cdot \frac{4x}{x+z}.$$

Taigi, du kartus pritaikę aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę, gauname nelygybę $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + 2 \geqslant 2 \cdot \frac{4x}{x+z}$. Analogiškai gauname dar dvi nelygybes $\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}+2\geqslant 2\cdot\frac{4y}{y+x}$ ir $\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}+2\geqslant 2\cdot\frac{4z}{z+y}$. Sudėję visas tris nelygybes ir jų sumą padaliję iš 2, gausime reikiamą nelygybę.

6. Ats. $(13,325)$, $(15,75)$, $(25,25)$.

Tarkime, kad skaičių pora (a,b) tenkina uždavinio sąlygą.

Jei $a>25$, tai $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{2}{25}$. Jei $a\leqslant 12$, tai $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{12}>\frac{2}{25}$. Taigi pakaktų patikrinti reikšmes $a=13,14,\ldots,25$, įrašant jas lygtyje. Tačiau vietoj to petvarkykime lygtį: $\frac{a+b}{ab}=\frac{2}{25}$, $2ab-25a-25b=0$, $2a\cdot 2b-25\cdot 2a-25\cdot 2b+25^2=25^2$, $(2a-25)(2b-25)=5^4$. Skaičiaus 5^4 daliklis $2a-25$ yra tarp skaičių $2\cdot 13-25=1$ ir $2\cdot 25-25=25$. Taigi $2a-25=1,5,25$ ir atitinkamai $a=13$, 15, 25. Skaičių b galime kaskart rasti iš lygybės $b=\frac{25a}{2a-25}$, ekvivalenčios pradinei lygčiai.

7. Ats. $1,2,3,\ldots$

Pastebėkime, kad lygybė $n^2+(n+3)^2-(n+1)^2-(n+2)^2=4$ yra tapatybė. Joje vietoj n įrašius $n+4$, gaunama dar viena tapatybė $(n+4)^2+(n+7)^2-(n+5)^2-(n+6)^2=4$. Vadinasi,

$$n^2+(n+3)^2-(n+1)^2-(n+2)^2=$$
$$=(n+4)^2+(n+7)^2-(n+5)^2-(n+6)^2,$$
$$n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2=$$
$$=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2,\ \text{kai } n=1,2,3,\ldots$$

Mažiausią iš Domo užrašytų skaičių pažymėkime m. Bet kuriai reikšmei $m=1,2,3,\ldots$ Domas galėjo užrašyti skaičius m, $m+1$, …, $m+7$, ir pabraukti skaičius m, $m+3$, $m+5$, $m+6$.

8. Ats. 10.

Galėjo būti nutrinta tik 10 skaičių: nutrynus visus nelyginius skaičius, bet kurių dviejų lentoje likusių skaičių suma yra lyginis skaičius, didesnis už 2, taigi kiekviena tokia suma yra sudėtinis skaičius.

Kita vertus, nutrynus 9 ar mažiau skaičių, bent vieną iš 10 porų $(1,16)$, $(2,15)$, $(3,14)$, $(4,13)$, $(5,12)$, $(6,11)$, $(7,10)$, $(8,9)$, $(17,20)$, $(18,19)$ sudarys du nenutrinti skaičiai, kurių suma lygi 17 arba 37 – pirminiam skaičiui. Taigi Rima mažiau nei 10 skaičių nutrinti negalėjo.

9. Ats. 1, 2 ir 4.

Jei $a = 2k+1 > 1$ yra nelyginis skaičius, tai $k^2(a+k^2) = (k(k+1))^2$ – prieštara. Jei $a = 8$, tai $1 \cdot (8+1) = 3^2$ – prieštara.

Remdamiesi aptartais netinkamų a reikšmių pavyzdžiais, galime gauti daugiau tokių pavyzdžių. Jei $a = (2k+1)a_0$ turi nelyginį pirminį daliklį $2k+1$, tai $k^2a_0(a+k^2a_0) = (a_0k(k+1))^2$ – prieštara. Jei $a = 8a_0$ dalijasi iš 8, tai $a_0(a+a_0) = (3a_0)^2$ – prieštara.

Kadangi a neturi nelyginio pirminio daliklio, tai a yra dvejeto laipsnis. Kadangi a nesidalija iš 8, tai $a = 1$, 2 arba 4.

Jei $a = 1$ arba 2, tai $n^2 < n(a+n) < (n+1)^2$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$. Taigi skaičiai $n(n+1)$ ir $n(n+2)$ negali būti tiksliaisiais kvadratais. Vadinasi, reikšmės $a = 1$ ir $a = 2$ tinka.

Jei $a = 4$, tai $n^2 < n(a+n) < (n+2)^2$ kiekvienam $n \in \mathbb{N}$. Jei $n(n+4)$ yra tikslusis kvadratas, tai $n(n+4) = (n+1)^2$ ir $n = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Vadinasi, reikšmė $a = 4$ taip pat tinka.

10. Ats. $(7, 13, 25)$, $(13, 25, 7)$, $(25, 7, 13)$.

Pažymėkime $2a-1 = ub$, $2b-1 = vc$, $2c-1 = wa$. Čia skaičiai $u, v, w \in \mathbb{N}$ yra nelyginiai. Šiose lygybėse panaikinkime b ir c:

$$v \cdot \frac{wa+1}{2} = vc = 2b-1 = 2 \cdot \frac{2a-1}{u} - 1, \ \Big| \ \cdot 2u$$

$$uvwa + uv = 8a - 4 - 2u, \qquad a(8-uvw) = uv + 2u + 4 > 0.$$

Taigi $8 - uvw > 0$, o nelyginis natūralusis skaičius uvw lygus 1, 3, 5 arba 7. Visais keturiais atvejais du iš skaičių u, v, w lygūs 1.

Tarkime, kad $u = v = 1$. Tada $b = 2a-1$, $c = 2b-1 = 4a-3$, o skaičius $2c-1 = 8a-7$ dalijasi iš a. Kadangi skaičius 7 dalijasi iš a, tai $a = 1$ arba 7. Atitinkamai $b = 1$, $c = 1$ (netinka, nes $a \neq b$) arba $b = 13$, $c = 25$.

Gavome $(a, b, c) = (7, 13, 25)$. Kai $v = w = 1$ ir kai $w = u = 1$, analogiškai gausime $(a, b, c) = (25, 7, 13)$ ir $(a, b, c) = (13, 25, 7)$. Visi trys skaičių trejetai tenkina uždavinio sąlygą.

11. Ats. 1440.

Priklausomai nuo fragmento 2021 vietos apverstuke, yra septyni tinkamų apverstukų tipai: 1) $\overline{2021aba1202}$; 2) $\overline{a2021b1202a}$; 3) $\overline{ab2021202ba}$; 4) $\overline{abc12021cba}$; 5) $\overline{ab1202021ba}$; 6) $\overline{a1202b2021a}$; 7) $\overline{1202aba2021}$. Šių tipų porų perrankos būdu nustatomi apverstukai, priklausantys dviem tipams vienu metu: 20212021202 (1 ir 4 tipai), $\overline{12021a12021}$ (2 ir 7 tipai), $\overline{a120212021a}$ (3 ir 6 tipai).

Kiekvieną skaitmenį a arba b galima parinkti 10 būdų, išskyrus atvejus, kai a yra pirmasis skaitmuo ir tada būdų yra 9. Todėl tam tikro tipo tinkamų apverstukų atitinkamai yra 1) 100; 2) 90; 3) 90; 4) 900; 5) 90; 6) 90; 7) 100. Sumoje $100 + 90 + 90 + 900 + 90 + 90 + 100$ po du kartus yra įskaičiuoti: vienas 1 ir 4 tipų apverstukas; dešimt 2 ir 7 tipų apverstukų; devyni 3 ir 6 tipų apverstukai. Taigi iš viso yra

$$100 + 90 + 90 + 900 + 90 + 90 + 100 - 1 - 10 - 9 = 1440$$

vienuolikaženklių proginių apverstukų.

12. Ats. 200.

Neįmanoma užsakyti 5 kambarių vienoje koridoriaus pusėje: jei jokie du iš jų nebūtų gretimi, tai su kambariais, skiriančiais užsakytus kambarius, toje koridoriaus pusėje jau turėtume bent $5 + 4 = 9$ kambarius. Todėl vienoje koridoriaus pusėje reikia užsakyti 3 kambarius, o kitoje pusėje – 4. Pasirinkti tris iš 8 kambarių vienoje pusėje, kad jokie du kambariai nebūtų gretimi, galima tokiu būdu: pasirinkti bet kuriuos tris skaičius $x < y < z$ iš aibės $\{1, 2, \ldots, 6\}$, o tada pasirinkti kambarius vienoje koridoriaus pusėje, kurių eilės numeriai yra x, $y + 1$, $z + 2$. Pasirinkti keturis iš 8 kambarių vienoje pusėje, kad jokie du kambariai nebūtų gretimi, galima tokiu būdu: pasirinkti bet kuriuos keturis skaičius $x < y < z < t$ iš aibės $\{1, 2, \ldots, 5\}$, o tada pasirinkti kambarius vienoje koridoriaus pusėje, kurių eilės numeriai yra x, $y+1$, $z+2$, $t+3$.

Vadinasi, tinkamai pasirinkti 3 kambarius koridoriaus kairėje ir 4 kambarius koridoriaus dešinėje yra $C_6^3 \cdot C_5^4 = 20 \cdot 5 = 100$ būdų. Yra tiek pat būdų pasirinkti 3 kambarius dešinėje ir 4 kambarius kairėje. Iš viso gauname 200 būdų.

13. Ats. Birutė turi pergalės strategiją.

Žvaigždutes, esančias lyginėse pozicijose, vadinkime lyginėmis, o likusias žvaigždutes – nelyginėmis. Birutė po Arno kiekvieno ėjimo gali rinktis kitokio lyginumo žvaigždutę nei ta, kurią ką tik nutrynė Arnas, ir nesirinkti pirmosios žvaigždutės (prieš Arno kiekvieną ėjimą nelyginių žvaigždučių bus viena daugiau nei lyginių). Taip darydama, Birutė gali laikytis tokios strategijos: jei Arnas ką tik nutrynė pirmąją žvaigždutę ir parašė skaitmenį a (jis nelygus 0), tai Birutė parašo skaitmenį $a-1$, o jei Arnas ką tik nutrynė ne pirmąją žvaigždutę ir parašė skaitmenį a, tai Birutė taip pat parašo skaitmenį a.

Paskutinė likusi žvaigždutė bus nelyginė. Arnas ją pakeis tam tikru skaitmeniu b. Nagrinėkime du atvejus.

1) Tarkime, kad ši žvaigždutė yra pirmoji. Gautojo skaičiaus skaitmenų nelyginėse pozicijose sumos ir skaitmenų lyginėse pozicijose sumos skirtumas lygus $b \in [1, 9]$. Jis nesidalija iš 11, todėl pats gautasis skaičius (pagal dalumo iš 11 požymį) nesidalija iš 11.

2) Tarkime, kad ši žvaigždutė nėra pirmoji. Tada skaitmenų nelyginėse pozicijose sumos ir skaitmenų lyginėse pozicijose sumos skirtumas prieš Arno paskutinį ėjimą yra lygus 1, o po Arno paskutinio ėjimo jis tampa lygus $b+1 \in [1, 10]$. Šis skirtumas nesidalija iš 11, todėl gautasis skaičius (pagal dalumo iš 11 požymį) nesidalija iš 11.

Vadinasi, Birutė laimi abiem atvejais.

14. Ats. Ne, neįmanoma.

Tarkime, kad skaičiai lentelėje surašyti reikiamu būdu. Nagrinėkime pirminį skaičių 41. Tarkime, kad jis yra i-tojoje eilutėje ir j-tajame stulpelyje. Jei $i \neq j$, tai i-tajame stulpelyje nėra nei skaičiaus 41 (kuris yra j-tajame stulpelyje), nei kitų skaičiaus 41 kartotinių, kurių lentelėje apskritai nėra, nes $41 \cdot 2 > 81$. Tada i-tosios eilutės skaičių sandauga dalijasi iš 41, o i-tojo stulpelio skaičių sandauga iš 41 nesidalija. Vadinasi, $i = j$, ir skaičius 41 priklauso pagrindinei lentelės įstrižainei (t. y. ilgajai įstrižainei iš kairiojo viršutinio kampo).

Analogiškai gauname, kad pagrindinei lentelės įstrižainei priklauso pirminiai skaičiai 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79. Gavome 10 šios įstrižainės skaičių, tačiau joje tėra 9 langeliai. Prieštara. Vadinasi, lentelės reikiamu būdu užpildyti neįmanoma.

15. Lentelės skaičių, esantį i-tojoje eilutėje ir j-tajame stulpelyje, žymėsime a_{ij}.

Tarkime, kad $n \geqslant 2$. Nagrinėkime bet kuriuos du apibrauktus skaičius a_{uv} ir a_{wt}. Tada $u \neq w$, $v \neq t$ ir $a_{uv} < a_{ut} < a_{wt}$. Tuo pačiu metu $a_{wt} < a_{wv} < a_{uv}$. Prieštara. Vadinasi, $n = 0$ arba $n = 1$.

Atvejį $n \geqslant 1$, taigi atvejį $n = 1$, gausime, pavyzdžiui, pirmojoje eilutėje iš eilės surašę skaičius 8, 9, …, 15, pirmajame stulpelyje – skaičius 8, 7, …, 1, o likusius skaičius langeliuose toliau surašę bet kaip. Tada skaičius 8 būtų apibrauktas.

Atvejį $n = 0$ gausime, pavyzdžiui, lentelės ilgojoje įstrižainėje surašę skaičius 1, 2, …, 8, o likusius skaičius langeliuose toliau surašę bet kaip. Tada mažiausias skaičius kiekvienoje eilutėje yra vienas iš skaičių $1, 2, \ldots, 8$. Todėl tik šie skaičiai galėtų būti apibraukti. Tačiau kiekvienas iš jų savo stulpelyje yra mažiausias skaičius, o ne didžiausias.

16. Ats. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Nagrinėkime statųjį trikampį ABC ($\angle C = 90°$, $\angle B = 2\alpha$), kuriame nuleista pusiaukampinė BK. Tada stačiuosiuose trikampiuose BCK ir ABC turime:

$$\cos\alpha = \frac{BC}{BK} = BC, \qquad 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Taigi $\cos\alpha = BC$ yra lygties $2x^2 - \frac{x}{\sqrt{3}} - 1 = 0$ vienintelis teigiamas sprendinys $BC = x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tada $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$. Trikampio ABC plotas lygus $\frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

17. Ats. $AB = 6$, $BC = 12\sqrt{2}$, $AC = 6\sqrt{5}$.

Atkarpų BC ir AC vidurio taškus atitinkamai pažymėkime E ir F. Tada EF yra trikampio ABC vidurio linija, $AB = 2AD = 6$, $EF = AB : 2 = 3$ ir $EF || AB$. Pastebėkime, kad $DM^2 = AM^2 + AD^2$, todėl $AD \perp AM$. Kadangi $EF || AB$, tai $EF \perp AM$. Taškas M dalija pusiaukraštinę AE santykiu $2 : 1$, todėl $AE = \frac{3}{2} \cdot AM = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6$. Pritaikykime Pitagoro teoremą statiesiems trikampiams ABE ir AEF:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 72, \qquad BE = 6\sqrt{2}, \qquad BC = 2BE = 12\sqrt{2};$$

$$AF^2 = AE^2 + EF^2 = 45, \qquad AF = 3\sqrt{5}, \qquad AC = 2AF = 6\sqrt{5}.$$

18. Turime $x + y + z = 180$ (trikampio kampų suma), $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$ (trikampio nelygybė). Todėl

$$2ax + 2by + 2cz = (ax + by + cz) + (ax + by + cz) <$$

$$< ax + by + cz + (b + c)x + (c + a)y + (a + b)z =$$

$$= (a + b + c)(x + y + z) = 180(a + b + c), \ | \ : 2(a + b + c)$$

$$\frac{ax + by + cz}{a + b + c} < 90.$$

Kitos nelygybės įrodyme galime laikyti, kad $a \geqslant b \geqslant c$ ir tada $x \geqslant \geqslant y \geqslant z$ (prieš ilgesnę kraštinę didesnis kampas). Prisiminkime Perstatų nelygybę: jei $k_1, k_2, \ldots, k_n$ yra bet koks skaičių $1, 2, \ldots, n$ kėlinys (perstata) ir jei $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$, tai

$$x_1y_n + x_2y_{n-1} + \ldots + x_ny_1 \leqslant x_1y_{k_1} + x_2y_{k_2} + \ldots + x_ny_{k_n} \leqslant$$

$$\leqslant x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Todėl $ax + by + cz \geqslant ay + bz + cx$, $ax + by + cz \geqslant az + bx + cy$ ir

$$180(a + b + c) = (a + b + c)(x + y + z) =$$

$$= (ax + by + cz) + (ay + bz + cx) + (az + bx + cy) \leqslant$$

$$\leqslant 3(ax + by + cz), \ | \ : 3(a + b + c)$$

$$60 \leqslant \frac{ax + by + cz}{a + b + c}.$$

19. Sujungę taškus A, E, F, D gausime arba keturkampį $AEFD$, arba keturkampį $AFED$. Čia išnagrinėsime pirmąjį atvejį (antrasis atvejis nagrinėjamas analogiškai).

Kadangi $\angle AED = \angle AFD = 90°$, tai keturkampis $AEFD$ įbrėžtinis. Keturkampis $ACBD$ taip pat įbrėžtinis, todėl $\angle ABC = \angle ADC = = \angle ADF = \angle 180° - \angle AEF = \angle BEF$. Kadangi $\angle CBE = \angle BEF$, tai tiesės BC ir EF lygiagrečios. Vadinasi, $\angle DQP = \angle DEF = \angle DAF$. Kadangi $\angle DQP = \angle DAP$, tai taškai A, P, Q, D priklauso vienam apskritimui.

20. Trikampio ABC kampus pažymėkime $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Tarkime, kad šio trikampio pusiaukampinė CK (kur $K \in AB$) kertasi su kitomis dviem pusiaukampinėmis taške I, o su trikampio ABC apibrėžtiniu apskritimu tiesė CK kertasi taške $L \neq C$. Geometrijoje žinomas toks faktas (jį galima įrodyti per kampus): jei trikampiui ABC taškai I ir L apibrėžti taip, kaip mūsų situacijoje, tai $LA = LB = LI$. Taigi taškas L yra apskritimo c, einančio per taškus A, B, I, centras.

Trikampio AIB kampai lygūs α, β ir

$$\angle AIB = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ + \gamma = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} = \angle ADB.$$

Vadinasi, taškai A, I, D, B priklauso vienam apskritimui c.

Kadangi $MC^2 = MA \cdot MB$ ir $NC^2 = ND \cdot NA$ (kirstinė ir liestinė), tai taškai M ir N priklauso apskritimo c ir išsigimusio apskritimo C radikalinei ašiai. Taigi $MN \perp CL$.

Tiesė MC liečia trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą, todėl $\angle ACM = \angle ABC = 2\beta$ ir $\angle MCK = \angle MCA + \angle ACK = 2\beta + \gamma$. Kita vertus, $\angle MKC = 180^\circ - \angle BKC = \angle CBK + \angle BCK = 2\beta + \gamma = \angle MCK$. Vadinasi, trikampis CMK lygiašonis ir $MC = MK$. Tiesėje MN yra šio trikampio aukštinė iš M, kuri sutampa su trikampio pusiaukampine. Todėl $\angle BMN = \angle CMN$.