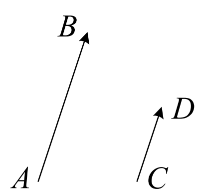
L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

5 tema. VEKTORINIO METODO TAIKYMAI

(2020-2022)

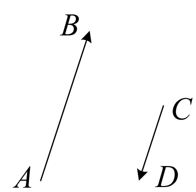
Teorinę medžiagą parengė ir penktąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

Sakoma, kad atkarpa AB yra *orientuotoji atkarpa* (arba kryptinė atkarpa), jei yra nurodyta, kuris iš taškų A ir B yra orientuotosios atkarpos pradžios taškas, tuomet kitas iš atkarpos galų yra jos pabaigos taškas. Orientuotosios atkarpos yra vadinamos *vektoriais*. Tekste vektoriai žymimi arba viena raide su rodykle $\vec{a}$, arba dviem didžiosiomis raidėmis su rodykle $\overrightarrow{AB}$, pirmoje vietoje rašant vektoriaus pradžios tašką. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami a) *vienakrypčiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra vienodos krypties (1a pav.), b) *priešpriešiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$), jei spinduliai AB ir CD yra priešingų krypčių (1b pav.), c) *kolineariaisiais* (žymima $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$), jei tiesės AB ir CD lygiagrečios. Kolinearieji vektoriai yra arba vienakrypčiai, arba priešpriešiai. Vektoriaus $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *ilgiu* (arba *moduliu*) vadinamas atkarpos AB ilgis; vektoriaus $\vec{a}$ modulis žymimas $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra vadinami *lygiais*, jei jų moduliai lygūs, o kryptys sutampa, žymima $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad, jei vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ nėra vienoje tiesėje, tai vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ yra lygūs tada ir tik tada, kai keturkampis $ABDC$ yra lygiagretainis.



$\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$

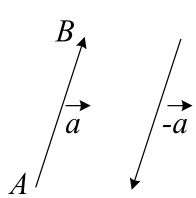
1a pav.



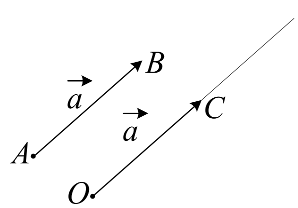
$\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$

1b pav.

Nuliniu vektoriumi $\vec{0}$ vadinamas toks vektorius, kurio pradžios ir galo taškai sutampa. Nulinis vektorius yra kolinearusis su bet kuriuo vektoriumi. Nulinio vektoriaus modulis lygus nuliui. Vektoriai, kurių moduliai lygūs, o kryptys priešingos, yra vadinami *priešingaisiais vektoriais*. Vektoriui $\vec{a}$ priešingasis vektorius žymimas $-\vec{a}$. Akivaizdu, kad $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (2 pav.).

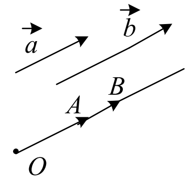


2 pav.



3 pav.

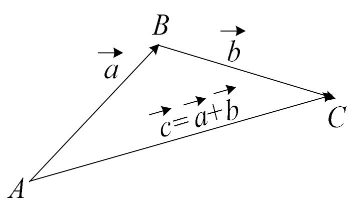
Sakykime, kad $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – duotasis vektorius, O – bet kuris plokštumos taškas. Nubrėžkime spindulį OM, vienkryptį su spinduliu AB ir jame raskime vienintelį tašką C, kad atkarpos AB ir OC būtų vienodo ilgio (3 pav.). Tuomet vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{OC}$ yra lygūs. Sakoma, kad vektorius $\vec{a}$ yra atidedamas nuo taško O. Akivaizdu, bet kuris vektorius vieninteliu būdu yra atidedamas nuo bet kurio taško. Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – kolinearieji vektoriai, tai atidėti nuo vieno taško, jie yra vienoje tiesėje (4 pav.). Jei du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ atidėti nuo vieno taško O ($\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}$), tai kampas AOB yra vadinamas *kampu tarp vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$; šis kampas yra intervale $[0^0, 180^0]$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ lygus 0°, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ – tai kampas tarp jų lygus 180°.



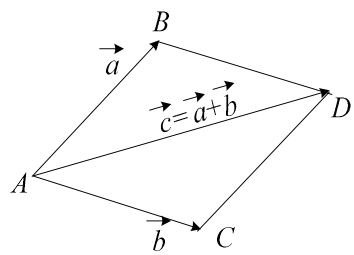
$\vec{a} \parallel \vec{b},\ \overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}.$

4 pav.

Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du vektoriai. Parinkime tašką A ir atidėkime nuo jo vektorių $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, o nuo taško B - vektorių $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ (5 pav.). Tuomet vektorius $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ yra vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, arba $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (vektorių sudėties trikampio taisyklė).



5 pav.



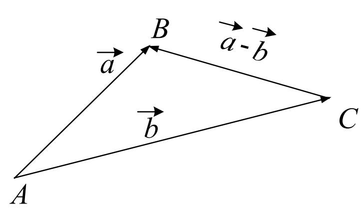
6 pav.

Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearieji, tai atidėję nuo taško A vektorius $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ir $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, nubrėžiame lygiagretainį *ABDC* (6 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (vektorių sudėties lygiagretainio taisyklė).

Vektorių sudėtis pasižymi šiomis savybėmis:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

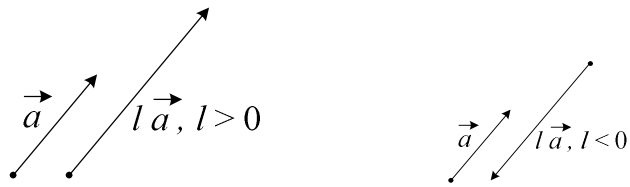
Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skirtumu* vadinamas toks vektorius $\vec{x}$, kad $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$, žymime $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$. Akivaizdu, kad $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (7 pav.). Jei $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AC}$, tai $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.



7 pav.

Skaičiaus *l* ir vektoriaus $\vec{a}$ *sandauga* vadinamas vektorius $\vec{b}$, nustatomas šiomis sąlygomis:

1) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, jei $l > 0, \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, jei $l < 0$;
2) $|\vec{b}| = |l| \cdot |\vec{a}|$ (8 pav.).



8 pav.

Skaičiaus 0 ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga yra nulinis vektorius. Skaičiaus *l* ir vektoriaus $\vec{a}$ sandauga žymima $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$ (arba $\vec{b} = l\vec{a}$).

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus pasižymi tokiomis savybėmis:

1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a},\ -1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$,
2) $(lk) \cdot \vec{a} = l \cdot (k \cdot \vec{a})$,
3) $(l + k) \cdot \vec{a} = l \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{a}$,
4) $l \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = l \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$.

Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai yra toks skaičius *l*, kad $\vec{b} = l \cdot \vec{a}$. Jei $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, tai $l = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, o jei $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, tai $l = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

1 pavyzdys. Nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji. Rasime tokią x reikšmę, kad vektoriai $\vec{c} = (x - 2)\vec{a} + \vec{b}$ ir $\vec{d} = (2x + 1)\vec{a} - \vec{b}$ būtų kolinearieji.

Sprendimas. Vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ yra kolinearieji tada ir tik tada, kai yra toks skaičius y, kuriam yra teisinga lygybė $\vec{d} = y\vec{c}$. Taikydami vektoriaus daugybos iš skaičiaus ir vektorių sudėties savybes iš šios lygybės gauname, kad $(2x + 1)\vec{a} - \vec{b} = y\left((x - 2)\vec{a} + \vec{b}\right)$, $(2x + 1)\vec{a} - \vec{b} = (xy - 2y)\vec{a} + y\vec{b}$. Iš vektorių atimties savybių išplaukia, kad vektoriai gali būti perkeliami iš vienos lygybės pusės į kitą, keičiant ženklus. Todėl iš paskutiniosios lygybės turime

$$(2x + 1 - xy + 2y)\vec{a} = (1 + y)\vec{b}. \qquad (*)$$

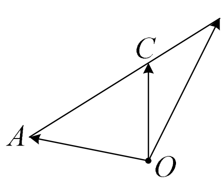
Jei $y + 1 \neq 0$, tai iš jo padalijęs gauname, kad $\vec{b} = \frac{2x+1+xy+2}{y+1}\vec{a}$, taigi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji, o tai prieštarauja uždavinio sąlygai. Taigi $y + 1 = 0$, todėl (*) lygybės dešinioji pusė lygi nuliniam vektoriui. Iš čia gauname, kad $(2x + 1 - xy + 2y)\vec{a} = \vec{0}$. Kadangi vektorius $\vec{a}$ yra nenulinis, tai ši lygybė teisinga tik kai $2x + 1 - xy + 2y = 0$. Taigi tam, kad vektoriai $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ būtų kolinearieji, turi galioti lygybės $2x + 1 - xy + 2y = 0$ ir $y + 1 = 0$. Iš jų randame, kad $y = -1$, $x = \frac{1}{3}$. Patikrinus gauname, kad $\vec{c} = \left(\frac{1}{3} - 2\right)\vec{a} + \vec{b} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \left(2 \cdot \frac{1}{3} + 1\right)\vec{a} - \vec{b} = \frac{5}{3}\vec{a} - \vec{b}$, taigi $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ – priešingieji vektoriai.

Atsakymas: $x = \frac{1}{3}$.

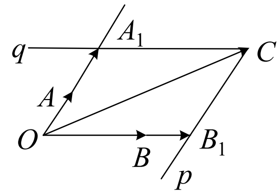
2 pavyzdys. Sakykime, kad atkarpoje *AB* yra taškas *C* ir $AC : CB = \alpha : \beta$, čia α ir β – du duotieji skaičiai. Tuomet bet kuriam taškui *O* yra teisinga lygybė $\overrightarrow{OC} = \frac{\beta\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{OB}}{\alpha+\beta}$.

Sprendimas. Sakykime, kad $AC : CB = \alpha : \beta$ (9 pav.). Tuomet $\overrightarrow{AC} = \frac{\alpha}{\beta}\overrightarrow{CB}$. Jei *O* – bet kuris plokštumos taškas, tai $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, t. y. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \frac{\alpha}{\beta}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$. Iš čia gauname, kad $(\alpha + \beta)\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OB} + \beta\overrightarrow{OA}$, ką ir reikėjo įrodyti.

1 teorema. Sakykime, kad $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – du plokštumos nekolinearieji vektoriai. Tuomet bet kuris plokštumos vektorius $\vec{c}$ vienareikšmiškai išreiškiamas vektoriais $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ t. y. egzistuoja skaičiai *l* ir *m*, kad būtų teisinga lygybė $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$.



9 pav.

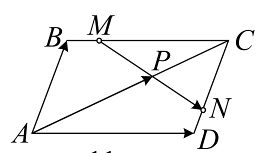


10 pav.

Įrodymas. Atidėkime duotuosius vektorius nuo pasirinkto plokštumos taško O: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ (10 pav.). Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji, tai taškai A, B ir C nėra vienoje tiesėje. Per tašką C nubrėžiame tieses $p \parallel OA$ ir $q \parallel OB$. Sakykime, kad tiesės p ir OB kertasi taške B_1, o tiesės q ir OA – taške A_1. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{OA_1}$ ir $\overrightarrow{OA}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius l, kad $\overrightarrow{OA_1} = l \cdot \overrightarrow{OA} = l \cdot \vec{a}$. Analogiškai vektoriai $\overrightarrow{OB_1}$ ir $\overrightarrow{OB}$ kolinearieji, tai egzistuoja skaičius m, kad $\overrightarrow{OB_1} = m \cdot \overrightarrow{OB} = m \cdot \vec{b}$. Kadangi $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, tai $\vec{c} = l\vec{a} + m\vec{b}$. Jei $l' \neq l$, ir $m' \neq m$ – kiti skaičiai, su kuriais teisinga lygybė $\vec{c} = l'\vec{a} + m'\vec{b}$, tai atėmę vieną lygybę iš kitos, gauname, kad $(l - l')\vec{a} + (m - m')\vec{b} = \vec{0}$ t. y. $\vec{a} = \frac{m-m\prime}{n-n\prime}\vec{b}$, taigi $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Gavome prieštarą teoremos sąlygai, taigi $l' = l$, $m' = m$, ir teorema įrodyta.

3 pavyzdys. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinėje BC yra taškas M toks, kad $BM : MC = 1:4$, o kraštinėje CD yra taškas N toks, kad $CN : ND = 3:2$. Rasime, kokiu santykiu atkarpa MN dalija įstrižainę AC.

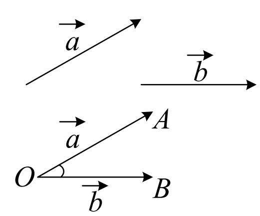
Sprendimas. Tokių uždavinių sprendime taikome 1 teoremoje įrodytą teiginį. Tuo tikslu pasirenkame kurį nors vektorių ir jį du kartus išreiškiame dviem nekolineariaisiais vektoriais. Sakykime, kad atkarpos MN ir AC kertasi taške P (11 pav.). Vektoriai $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ yra nekolinearieji, todėl pasirinkę vektorių $\overrightarrow{AP}$ jį išreikškime šiais vektoriais dviem būdais – t. y. taikydami du skirtingus uždavinio sąlygos teiginius. Visų pirma pastebime, kad vektoriai $\overrightarrow{AP}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja skaičius x, kad $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AC}$. Kadangi pagal vektorių sudėties lygiagretainio taisyklę $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, tai $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ (1). Kita vertus, taškas P yra atkarpoje MN, taigi vektoriai $\overrightarrow{MP}$ ir $\overrightarrow{MN}$ yra kolinearieji, todėl egzistuoja toks skaičius y, kad yra teisinga lygybė $\overrightarrow{MP} = y\overrightarrow{MN}$, o tai reiškia – ir lygybė $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MN}$. Išreikšime šios lygybės dešniojoje pusėje esančius vektorius pasirinktais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$. Turime, kad $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$. Iš čia turime $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} + y\left(-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}\right)$, taigi gauname dar vieną vektoriaus $\overrightarrow{AP}$ išraišką: $\overrightarrow{AP} = \left(1 - \frac{3y}{5}\right)\overrightarrow{AB} + (\frac{1}{5} + \frac{4y}{5})\overrightarrow{AD}$ (2). Kadangi pagal 1 teoremą vektorius $\overrightarrow{AP}$ nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AD}$ išreiškiamas vieninteliu būdu, tai (1) ir (2) lygybės turi sutapti, t. y. koeficientai prie tų pačių vektorių turi būti vienodi. Taigi gauname sistemą $x = 1 - \frac{3y}{5}$, $x = \frac{1}{5} + \frac{4y}{5}$. Iš šios sistemos surandame $y = \frac{4}{7}$, $x = \frac{23}{35}$. Taigi $\overrightarrow{AP} = \frac{23}{35}\overrightarrow{AC}$, todėl ieškomasis santykis $AP : PC = 23:12$.



11 pav.

Atsakymas: 23 :12.

Sakykime, kad duoti du vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Atidėkime juos nuo vieno taško O, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (12 pav.). Tuomet kampas AOB yra kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Skaičius, lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ modulių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų kosinuso, vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga.* Jei $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. – duotieji vektoriai, kampas tarp jų lygus φ, tai jų skaliarinė sandauga $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$. Iš skaliarinės sandaugos



12 pav.

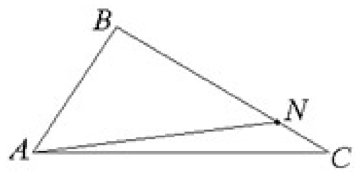
apibrėžimo išplaukia, kad nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ statmeni tada ir tik tada, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.

Skaliarinė sandauga pasižymi šiomis savybėmis:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $(l \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = l \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ tik kai $\vec{a} = \vec{0}$.

Pagal skaliarinės daugybos apibrėžimą ir ketvirtąją savybę kampas φ tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ apskaičiuojamas pagal formulę $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, o vektoriaus $\vec{a}$ modulis – pagal formulę $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

4 **pavyzdys.** Trikampio ABC kraštinės AB ir AC lygios atitinkamai 4 ir 8, kampas A lygus 60^0, taškas N dalija kraštinę BC santykiu $BN : NC = 3 : 1$. Rasime atkarpos AN ilgį (13 pav.).



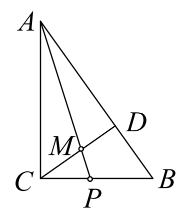
13 pav.

Sprendimas. Kadangi $BN : NC = 3 : 1$, tai pagal 2 pavyzdžio lygybę $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$. Pakėlę šią lygybę skaliariškai kvadratu, gauname $\overrightarrow{AN}^2 = \frac{1}{16}(\overrightarrow{AB}^2 + 6\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 9\overrightarrow{AC}^2)$. Kadangi $\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 16$, $\overrightarrow{AC}^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 64$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\angle\mathrm{A} = 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16$, tai $\overrightarrow{AN}^2 = \frac{1}{16}(16 + 6 \cdot 16 + 9 \cdot 64) = 43$, todėl $AN = \sqrt{\overrightarrow{AN}^2} = \sqrt{43}$.

Atsakymas: $\sqrt{43}$.

5 pavyzdys. Stačiajame trikampyje $ABC, \angle\mathrm{C} = 90^0$, nubrėžta aukštinė CD, taškas M – jos vidurio taškas, tiesė AM kerta statinį CB taške P. Įrodysime, kad $CP : PB = cos^2\angle\mathrm{A}$.

Sprendimas. Sakykime, kad stačiajame trikampyje ABC $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$ (14 pav.). Vektorių $\overrightarrow{CD}$ išreikšime nekolineariaisiais vektoriais $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ ir $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Tarkime, kad $\overrightarrow{CD} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Kadangi $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$, vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra statmeni, o $\vec{a}^2 = a^2$, $\vec{b}^2 = b^2$, tai vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$ statmenumo sąlyga yra tokia: $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(x\vec{a} + y\vec{b}\right) = 0$. Iš čia gauname, kad $xa^2 - yb^2 = 0$. Kadangi taškas D yra atkarpoje AB, tai vektoriai $\overrightarrow{AD}$ ir $\overrightarrow{AB}$ yra kolinearieji, taigi yra toks skaičius z, kad $\overrightarrow{AD} = z\overrightarrow{AB}$. Iš lygybės $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = x\vec{a} + (y-1)\vec{b}$ išplaukia, kad $x\vec{a} + (y-1)\vec{b} = z\vec{a} - z\vec{b}$. Kadangi $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji vektoiriai, tai ši lygybė yra teisinga, kai $x = z$, $y - 1 = -z$. Iš čia $x = 1 - y$, todėl $(1-y)a^2 - yb^2 = 0$. Taigi $y = \frac{a^2}{a^2+b^2}$, $x = 1 - y = \frac{b^2}{a^2+b^2}$, todėl gavome tokią vektoriaus $\overrightarrow{CD}$ išraišką $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{a^2+b^2}(b^2\vec{a} + a^2\vec{b})$. Tuomet $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}\left(b^2\vec{a} + a^2\vec{b}\right)$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}\left(b^2\vec{a} + a^2\vec{b}\right) - \vec{b} = \frac{1}{2(a^2+b^2)}\left(b^2\vec{a} - (a^2 + 2b^2)\vec{b}\right)$. Kadangi vektoriai $\overrightarrow{CP}$ ir $\overrightarrow{CB}$ yra kolinearieji, tai yra toks skaičius k, kad $\overrightarrow{CP} = k\vec{a}$. Vektoriai $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA} = k\vec{a} - \vec{b}$ ir $\overrightarrow{AM}$ irgi yra kolinearieji, todėl yra toks skaičius l, kad $\overrightarrow{AM} = l\overrightarrow{AP}$, taigi



14 pav.

$\frac{1}{2(a^2+b^2)}\left(b^2\vec{a}-(a^2+2b^2)\vec{b}\right)=lk\vec{a}-l\vec{b}$. Kadangi vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji, tai ši lygybė teisinga, kai $l=\frac{a^2+2b^2}{2(a^2+b^2)}$, $k=\frac{b^2}{2(a^2+b^2)}:l=\frac{b^2}{a^2+2b^2}$. Taigi $\overrightarrow{CP}=\frac{b^2}{a^2+2b^2}\overrightarrow{CB}$, todėl $CP:PB=\frac{b^2}{a^2+2b^2}:\left(1-\frac{b^2}{a^2+2b^2}\right)=\frac{b^2}{a^2+b^2}=\left(\frac{b}{c}\right)^2=cos^2\angle$A.

PENKTOJI UŽDUOTIS

1. $ABCDEF$ – taisyklingasis šešiakampis. Vektorius $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AF}$.
2. Taškai M ir N yra trikampio ABC kraštinių AB ir AC vidurio taškai. Vektorius $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{MN}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{BN}$ ir $\overrightarrow{CM}$.
3. Nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra nekolinearieji. Raskite tokias x ir y reikšmes, kad vektoriai $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ ir $\vec{d}=(y+1)\vec{a}+(2-x)\vec{b}$ būtų lygūs.
4. Taškas M yra trikampio ABC kraštinėje AB, taškas N yra jo kraštinėje BC ir $AM:MB=3:4$, $CN:NB=5:2$. Kokiu santykiu atkarpa MN dalija trikampio pusiaukraštinę BD?
5. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas N, o kraštinėje AC – taškas M taip, kad $AN:NB=2:5$, $AM:MC=3:4$. Atkarpos BM ir CN susikerta taške K. Raskite santykius $BK:KM$ ir $CK:KN$.
6. Trikampio PKH kraštinių PK ir PH ilgiai $PH=2\sqrt{2}$, $PK=2$, kampas HPK lygus 135^0. Kraštinėje KH yra pažymėtas toks taškas O, kad $HO:OK=1:3$. Raskite atkarpos PO ilgį.
7. Stačiojo trikampio ABC, $\angle$C $=90^0$, smailiojo kampo A kosinusas lygus $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Raskite kampą tarp šio trikampio pusiaukraštinių CD ir BE.
8. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB=3$, $AC=5$, kampo BAC didumas yra 120^0. Raskite jo pusiaukampinės AD ilgį.
9. Kvadrato $ABCD$ kraštinėse AB ir BC yra taškai $P\in AB$ ir $Q\in BC$ tokie, kad $BP=BQ$. Nubrėžta trikampio BPC aukštinė BH. Raskite kampo QHD didumą.
10. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai $AB=4$, $AD=6$, taškas M yra kraštinės BC vidurio taškas. Nubrėžtas kitas stačiakampis $MCEN$, taškas E yra kraštinės DC tęsinyje už taško C ir $CE=5$. Raskite kampą tarp tiesių, kuriose yra stačiakampių įstrižainės DB ir ME.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2021 m. spalio 25 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://mif.vu.lt/matematikos-olimpiados/ljmm/

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA