L I E T U V O S   J A U N Ų J Ų   M A T E M A T I K Ų   M O K Y K L A

4 tema. NIUTONO BINOMAS

(2020-2022)

Teorinę medžiagą parengė bei ketvirtąją užduotį sudarė prof. dr. Eugenijus Stankus

Izaoko Niutono (Isaac Newton – anglų fizikas, matematikas, astronomas, alchemikas, filosofas, 1643-1727) pavarde pavadinti fizikos dėsniai, žinomi kaip pirmasis, antrasis ir trečiasis Niutono dėsniai, jėgos matavimo vienetas. Niutonas atliko tyrinėjimus optikos, šiluminės fizikos, matematikos, chemijos, geografijos, istorijos srityse.

Niutonui priskiriama ir formulė dvinario n-tajam laipsniui $(x+y)^n$, $n=1,2,\ldots$, apskaičiuoti, kuri vadinama Niutono binomu. Paprasčiausius tokios formulės atvejus, kai $n=1,2,3$, žinome:

$$(x+y)^1 = x+y,\ (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,\ (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$

Pasinaudodami šiomis formulėmis galėtume apskaičiuoti $(x+y)^4$, $(x+y)^5$ ir aukštesnius laipsnius. Tik toks skaičiavimo būdas nelabai patogus, nes norint apskaičiuoti, pavyzdžiui, $(x+y)^{15}$ reikėtų gerokai padirbėti. Šios temos tikslas – išvesti reiškinio $(x+y)^n$ apskaičiavimo bendrą formulę (Niutono binomo), galiojančią su bet kuriuo laipsnio rodikliu $n=1,2,\ldots$. Taip pat panagrinėsime kai kuriuos uždavinius, susijusius su Niutono binomu.

Įrodinėdami šios temos teiginius naudosimės matematinės indukcijos metodu. Reikės ir kai kurių kombinatorikos žinių.

Matematinės indukcijos metodas. Principas, kai nuo atskirojo teiginio pereinama prie bendrojo, vadinamas *indukcija*. Tačiau teiginys būdamas teisingas atskirais atvejais gali negalioti visais atvejais. Toks pavyzdys galėtų būti teiginys apie kvadratinį trinarį $f(x)=x^2+x+5$ – apskaičiavę $f(1)=7$, $f(2)=11$, $f(3)=17$, suklysime teigdami, kad $f(n)$ su visais natūraliaisiais skaičiais n yra pirminis skaičius, nes $f(4)=25$, $f(5)=35$ nėra pirminiai. O kaip nesuklysti? Kada galima teigti, kad iš teiginio teisingumo atskirais atvejais išplaukia jo teisingumas bendruoju atveju? Atsakyti į šį klausimą kartais pavyksta *matematinės indukcijos metodu.* Šis metodas remiasi *matematinės indukcijos principu*, kuris formuluojamas taip.

Tarkime, kad: 1) *teiginys teisingas su* $n=1$, 2) *jei teiginys teisingas su* $n=k$ $(k\ge 1)$, *tai jis teisingas ir su* $n=k+1$. *Tuomet teiginys teisingas su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi n.*

Pastaba. Kartais, priklausomai nuo nagrinėjamo uždavinio, teiginys galioja nebūtinai pradedant $n=1$. Šis pradinis numeris gali būti $n=0$, $n=2$ arba $n=3$, arba bet kuris kitas natūralusis, netgi sveikasis, skaičius.

Derinių iš *n* elementų po *m* elementų skaičius. Išvedant Niutono binomo formulę mums prireiks išmokti apskaičiuoti baigtinės aibės *A*, turinčios $n\ge 1$ elementų, poaibių iš *m* elementų ($0\le m\le n$) skaičių. Šis skaičius žymimas C_n^m ir vadinamas *derinių iš n elementų po m elementų skaičiumi*. Dar C_n^m vadinami *binominiais koeficientais*, nes šie skaičiai, kaip toliau matysime, įeina į Niutono binomo formulę. Taip pat jie naudojami ir daugelyje kitų matematikos formulių.

Aibės *A* elementų skaičių toliau žymėsime $|A|$. Kad rastume C_n^m, fiksuokime kurį nors aibės *A*, $|A|=n$, elementą $a\in A$. Visų aibės *A* poaibių, turinčių po *m* elementų, aibę *P* ($|P|=C_n^m$) suskaidykime į dvi klases P_1 ir P_2. Klasei P_1 priskirkime tuos poaibius, turinčius po *m* elementų, kuriems priklauso elementas *a*, o klasei P_2 – tuos poaibius (turinčius po *m* elementų), kuriems nepriklauso elementas *a*. Kadangi $P=P_1\cup P_2$ ir $P_1\cap P_2=\varnothing$, tai

$$C_n^m = |P| = |P_1| + |P_2|. \qquad (1)$$

Visus klasės P_1 poaibius galima gauti iš aibės $A\setminus\{a\}$ (aibė *A* be elemento *a*, $|A\setminus\{a\}|=n-1$) poaibių po $m-1$ elementą prie jų prijungus elementą *a*. Todėl $|P_1|=C_{n-1}^{m-1}$. Klasė P_2 sutampa su aibių, sudarytų iš aibės $A \setminus \{a\}$ elementų po *m* elementų, aibe, taigi $|P_2| = C_{n-1}^m$. Įrašę gautąsias išraiškas į (1) formulę, gauname

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \qquad (2)$$

Ši lygybė vadinama Paskalio (Blaise Pascal - prancūzų filosofas, matematikas, fizikas, 1623-1662) lygybe, kuri dažnai iliustruojama vadinamuoju Paskalio trikampiu (žr. LJMM 2003-2005 m. m. 4 temą, autorius V. Stakėnas). Žinoma, kad Paskalio trikampis ir jo sudarymo (2) formulė buvo žinoma senovės Indijoje apie II amžių pr. Kr., o binominių koeficientų iki 8-o laipsnio lentelę 1303 m. sudarė kinų matematikai. Binominių koeficientų žymuo C_n^m atsirado 19 amžiuje, jis, kaip matėme, skirtas žymėti derinių skaičiui iš *n* elementų po *m* elementų. Binominiams koeficientams žymėti naudojamas ir kitas žymuo, įvestas anksčiau, t. y. $C_n^m = \binom{n}{m}$. Šio žymens autorius – Oileris (Leonhard Euler – šveicarų matematikas ir fizikas, 1707-1783).

Aptarkime „kraštinius“ binominių koeficientų atvejus.

Kai $n=1$ ($A=\{a\}$), tai *m* reikšmės galėtų būti $m=0$ ir $m=1$. Akivaizdu, kad $C_1^1 = 1$ ir $C_1^0 = 1$ (iš viso yra du poaibiai – vienas iš vieno elemento, kitas – tuščioji aibė). Kai $n=2$, tai aibės $A=\{a_1, a_2\}$ poaibių skaičius yra 4, t. y. jis lygus $C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 1+2+1$.

Naudodamiesi Paskalio formule galime apskaičiuoti ir tolesnes C_n^m reikšmes ar duotosios aibės visų poaibių skaičių. Tik tenka susitarti, kad

$$C_n^m = 0 \text{ su visais } n=1,2,\ldots, \text{ kai } m<0 \text{ arba kai } m>n, \text{ ir } C_n^0 = 1. \qquad (3)$$

Pastaroji lygybė reiškia, kad visuomet turime vieną poaibį be elementų (tai tuščioji aibė $\varnothing$ – ji irgi laikoma poaibiu). Natūralu, kad taip pat yra tik vienas poaibis, turintis *n* elementų – tai pati aibė *A*, todėl $C_n^n = 1$.

Matematikoje bei taikant ją, binominių koeficientų apibrėžimas kartais išplečiamas. Vietoje *n* įrašomas realusis (arba kompleksinis) skaičius α - tuomet turi prasmę ir simbolis $\binom{\alpha}{m}$. Tik dabar šis dydis jau negali būti interpretuojamas derinių skaičiumi, o yra apibrėžiamas formule, kurią išvesime toliau.

Sandaugą $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, kaip įprasta, žymėsime skaičiaus $n \geq 1$ *faktorialu*: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $0! = 1$. Faktorialo sąvoką 1808 m. įvedė Krampas (Christian Kramp – prancūzų matematikas, 1760-1826).

Derinių iš *n* elementų po *m* elementų skaičiaus formulės įrodymas. Taikydami matematinės indukcijos metodą, išvesime formulę binominiams koeficientams C_n^m apskaičiuoti.

Aukščiau matėme, kad $C_1^m = 1$, kai $m=0,1$. Naudojant faktorialo žymenį šias lygybes galima užrašyti formule

$$C_1^m = 1 = \frac{1!}{m!\cdot(1-m)!}, \text{ kai } m=0,1.$$

Įrodysime, kad formulė

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}, \text{ kai } m=0,1,2,\ldots,n, \qquad (4)$$

teisinga su visais $n \geq 1$.

Tuo tikslu tarkime, kad galioja formulė

$$C_{k-1}^m = \frac{(k-1)!}{m!\cdot(k-1-m)!}, \text{ kai } m=0,1,2,\ldots,k-1. \qquad (5)$$

Tuomet, pasinaudoję Paskalio (2) formule ir (5) prielaida (vadinama *indukcine prielaida*), gausime:

$$C_k^m = C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1} = \frac{(k-1)!}{m!\cdot(k-1-m)!} + \frac{(k-1)!}{(m-1)!\cdot(k-1-m+1)!} = \frac{k!}{m!\cdot(k-m)!}, \text{ kai } m=1,2,\ldots,k-1.$$

Kadangi formulė $C_k^m = \dfrac{k!}{m!\cdot(k-m)!}$ galioja ir su $m=0$ ir $m=k$, tai $C_k^m = \dfrac{k!}{m!\cdot(k-m)!}$, kai $m = 0,1,\ldots,k$.

Remdamiesi matematinės indukcijos principu galime teigti, kad (4) formulė derinių skaičiui C_n^m surasti galioja su visais $n \ge 1$.

Pastaba. Skaičiuojant koeficientus C_n^m dažnai naudojamasi formule

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!},\ \text{kai}\ m = 0,1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

kuri nesunkiai išvedama iš (4)-osios išskleidus faktorialus ir suprastinus. Beje, pastaroji išraiška naudojama apibrėžiant aukščiau minėtus apibendrintuosius binominius koeficientus:

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-m+1)}{m!}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad iš (4) formulės išplaukia svarbi binominių koeficientų savybė

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ m = 0,1,2,\ldots,n \tag{7}$$

(įsitikinkite jos teisingumu savarankiškai).

Niutono binomo formulė. Vėl naudodamiesi matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad su visais $n \ge 1$ galioja Niutono binomo formulė

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n y^0 + C_n^1 x^{n-1} y^1 + \ldots + C_n^{n-1} x^1 y^{n-1} + C_n^n x^0 y^n, \tag{8}$$

kuri, vartojant sumavimo simbolį $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, gali būti užrašyta taip:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m x^{n-m} y^m. \tag{9}$$

Niutono binomo (8) ir (9) lygybių dešines puses toliau vadinsime binomo $(x+y)^n$ *skleidiniu*, o skleidinio (m+1)-ąjį narį žymėsime $T_{m+1} = C_n^m x^{n-m} y^m,\ m = 0,1,\ldots,n$. Taigi binomo skleidinį sudaro $n+1$ nario suma.

Niutono binomo formulės įrodymas.

Kai $n=1$, (9) formulė teisinga: $(x+y)^1 = \sum_{m=0}^{1} C_1^m x^{1-m} y^m = C_1^0 x^1 y^0 + C_1^1 x^0 y^1 = x + y$.

Darome indukcinę prielaidą

$$(x+y)^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^m, \quad k \ge 2.$$

Tuomet

$$(x+y)^k = (x+y)\cdot(x+y)^{k-1} = (x+y)\cdot\sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^m = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-m} y^m + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^{m+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-m} y^m + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^{m+1} = \sum_{m=0}^{k} C_{k-1}^m x^{k-m} y^m + \sum_{m=0}^{k} C_{k-1}^{m-1} x^{k-m} y^m = \sum_{m=0}^{k} (C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1}) x^{k-m} y^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^m.$$

Čia pakeisdami sumavimą pasinaudojome (3) lygybėmis, o paskutiniame žingsnyje – Paskalio (2) lygybe. Gavome, kad

$$(x+y)^{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m x^{k-1-m} y^m \Rightarrow (x+y)^k = \sum_{m=0}^{k} C_k^m x^{k-m} y^m.$$

Pagal matematinės indukcijos principą galime teigti, kad Niutono binomo formulė ((8) ir (9) lygybės) galioja su visais natūraliaisiais skaičiais $n \ge 1$.

Uždavinių, susijusių su Niutono binomo formule, pavyzdžiai.

1 *pavyzdys*. Tarkime, aibė *A* sudaryta iš *n* elementų. Apskaičiuokime, kiek iš viso poaibių, įskaitant tuščią ir pačią aibę, galima sudaryti iš jos elementų.

Aišku, kad šis skaičius yra $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$. Pagal Niutono binomo formulę gauname, kad

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n . \qquad (10)$$

Taigi aibės *A* poaibių skaičius yra 2^n.

2 *pavyzdys*. Binominiai koeficientai tenkina lygybę

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0. \qquad (11)$$

Įrodymas. Įrašę į Niutono binomo (8) formulę $x = 1$ ir $y = -1$, gauname:

$$0 = (1+(-1))^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot (-1) + C_n^2 \cdot (-1)^2 + ... + C_n^{n-1}(-1)^{n-1} + C_n^n(-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n.$$

Taigi (11) formulė galioja.

3 *pavyzdys*. Apskaičiuokime sumą $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$.

Sprendimas. Pasinaudoję (7) formule galime rašyti:

$$C_n^1 = C_n^{n-1},\ C_n^2 = C_n^{n-2},\ C_n^3 = C_n^{n-3},\ ...,\ C_n^{n-1} = C_n^1,\ C_n^n = C_n^0 .$$

Tuomet $S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + ... + (n-1)C_n^1 + nC_n^0.$

Iš čia gauname: $2\,S_n = (C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + (n-2)C_n^{n-2} + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n) +$

$+(nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + (n-3)C_n^3 + ... + 2C_n^{n-2} + C_n^{n-1}) =$

$= n(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n) = n \cdot 2^n \Rightarrow S_n = n \cdot 2^{n-1}.$ *Ats.*: $S_n = n \cdot 2^{n-1}.$

4 *pavyzdys*. Raskime natūralųjį skaičių *n*, su kuriuo $\dfrac{C_{n+2}^4}{C_n^2} = 11$.

Sprendimas. $\dfrac{C_{n+2}^4}{C_n^2} = 11 \Rightarrow \dfrac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n\cdot(n-1)} = 11 \Rightarrow \dfrac{(n+2)\cdot(n+1)}{12} = 11 \Rightarrow n^2 + 3n + 2 = 132 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 3n - 130 = 0 \Rightarrow n = 10.$ *Ats.*: $n = 10.$

5 *pavyzdys*. Rasime Niutono binomo $\left(3x + \dfrac{1}{3x^2}\right)^6$ skleidinio narį, kurio reikšmė yra pastovi su visomis realiosiomis kintamojo *x* reikšmėmis.

Sprendimas. Tarkime, kad ieškomasis skleidinio narys yra $T_{m+1} = C_6^m (3x)^{6-m} (\dfrac{1}{3x^2})^m = C_6^m 3^{6-2m} x^{6-3m}$.

Kai $6 - 3m = 0$, šio nario reikšmė bus pastovi nepriklausomai nuo *x* reikšmės. Iš čia $m = 2$ ir ieškomasis narys yra $T_3 = C_6^2 \cdot 3^2 \cdot x^0 = 15 \cdot 9 = 135.$ *Ats.*: $T_3 = 135.$

KETVIRTOJI UŽDUOTIS

1. Naudodamiesi derinių skaičiaus formule $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, kai $m = 0,1,2,\ldots,n$, įrodykite Paskalio lygybę $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.

2. Įrodykite binominių koeficientų savybę $C_n^m \cdot C_m^p = C_n^p \cdot C_{n-p}^{m-p}$, čia $p \le m \le n$.

3. Matematinės indukcijos metodu įrodykite nelygybę $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$, kai $n \ge 2$.

4. Tegu n – lyginis natūralusis skaičius ($n=2k$). Nustatykite, kuris iš binominių koeficientų C_n^m, $m=0,1,2,\ldots,n$, yra didžiausias.

5. Naudodamiesi (10) ir (11) formulėmis apskaičiuokite sumą $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{n-2}+C_n^n$, kai n – lyginis natūralusis skaičius.

6. Raskite natūralųjį skaičių *n*, su kuriuo $C_{2n}^{2n-1}\cdot C_{2n+1}^{2n}=20$.

7. Binomo $\left(a\sqrt{a}+\dfrac{1}{a^4}\right)^n$ skleidinio trečiojo nario koeficientas yra 44 didesnis negu antrojo nario koeficientas. Raskite nario, į kurį neįeina kintamasis *a*, koeficientą.

8. Kelintas binomo $\left(\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\dfrac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ skleidinio narys turi daugiklį a^7?

9. Raskite binomo $(3-\sqrt[5]{3})^{15}$ skleidinio racionaliuosius narius.

10. Raskite reiškinio $R(x)=(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\ldots+(1+x)^{15}$ nario su daugikliu x^3 koeficientą.

Ketvirtosios užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2021 m. gegužės 10 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius.

Mokyklos interneto svetainės adresas: LJMM | Matematikos olimpiados (vu.lt)

LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA