LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

3. LYGČIŲ SISTEMOS

(2020–2022)

Teorinę medžiagą parengė ir trečiąją užduotį sudarė doc. dr. Antanas Apynis (Vilniaus universitetas) ir matematikos mokytojas ekspertas Antanas Apynis (Vilniaus Mykolo Biržiškos gimnazija)

Lengviausios yra tiesinių lygčių sistemos, aišku, su dviem nežinomaisiais. Daug sunkesnių galvosūkių pasitaiko sprendžiant netiesinių lygčių – netgi su dviem nežinomaisiais – sistemas. Narpliojant juos labai praverčia ne tik jau įgytos teorinės žinios, bet ir sukaupta konkrečių uždavinių sprendimo patirtis.

Iš pat pradžių kviečiame kartu pagvildenti kelis netiesinių lygčių sistemų sudarymo bei sprendimo uždavinius. Nagrinėjant pavyzdžius galbūt labiau išryškės vieno ar kito sprendimo būdo pranašumas konkrečiu atveju, gal pasidarys lengviau sugalvoti kokią nors gudrybę (nestandartinę strategiją), daug greičiau atvesiančią uždavinio sprendimą iki atsakymo.

1 pavyzdys. Tuo pačiu metu pirmas dviratininkas išvažiavo iš *M* į *N*, o antras dviratininkas – iš *N* į *M*. Prasilenkę taške *K*, jie važiavo toliau. Pirmas dviratininkas atkarpą *KN* įveikė per 72 minutes, o antras atkarpą *KM* – per 50 minučių.

Apskaičiuokime, keliais procentais antro dviratininko greitis (km/h) didesnis už pirmo dviratininko greitį.

Sprendimas. Tegu s yra atstumas (km) tarp M ir N; t – laikas (min), per kurį dviratininkai nuvažiavo kelio dalį iki prasilenkimo taško K; v_1 ir v_2 – atitinkamai pirmo ir antro dviratininko važiavimo greitis (km/h).

Pagal uždavinio sąlygą,

$$s = v_1 \cdot \frac{t}{60} + v_2 \cdot \frac{t}{60} = (v_1 + v_2) \cdot \frac{t}{60}; \tag{1}$$

$$s = v_1 \cdot \frac{72}{60} + v_2 \cdot \frac{50}{60} = \frac{6}{5}v_1 + \frac{5}{6}v_2; \tag{2}$$

$$s = v_1 \cdot \frac{t}{60} + v_1 \cdot \frac{72}{60} = \frac{t+72}{60} \cdot v_1; \tag{3}$$

$$s = v_2 \cdot \frac{t}{60} + v_2 \cdot \frac{50}{60} = \frac{t+50}{60} \cdot v_2. \tag{4}$$

Turime keturių lygčių su keturiais nežinomaisiais (s, t, v_1 ir v_2) sistemą.

Iš (1) ir (3) gauname lygtį $(v_1 + v_2)t = (t+72)v_1$, o iš (1) ir (4) – lygtį $(v_1 + v_2)t = (t+50)v_2$.

O tada:

$$\begin{cases} (v_1 + v_2)t = (t+72)v_1, \\ (v_1 + v_2)t = (t+50)v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 72 \cdot \dfrac{v_1}{v_2}, \\ t = 50 \cdot \dfrac{v_2}{v_1} \end{cases} \Rightarrow 72 \cdot \frac{v_1}{v_2} = 50 \cdot \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow v_2 = 1{,}2v_1.$$

Taigi antro dviratininko greitis 20 % didesnis už pirmo dviratininko greitį.

Ats.: 20 %.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad (2) sistemos lygtis taip ir liko nepanaudota, nes rezultatui gauti pakako (1), (3) ir (4) lygčių. Tos lygties lyg ir turėjome net nerašyti, bet iš kur galėjome žinoti, kad bus galima apsieiti ir be jos.

2 pavyzdys. Išspręskime lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} y^2 - 3xy = 2, \\ x^2 - 4xy + y^2 = 3. \end{cases} \tag{5}$$

Sprendimas. Matome, kad

$$x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - xy + (y^2 - 3xy),$$

todėl pabandykime šią sistemą spręsti taip:

$$\begin{cases} y^2-3xy=2, \\ x^2-4xy+y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-3xy=2, \\ x^2-xy+(y^2-3xy)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-3xy=2, \\ x^2-xy+2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-3xy=2, \\ xy=x^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-3xy=2, \\ y=x-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=2, \\ y=x-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2+\dfrac{1}{x^2}-3x^2+3=2, \\ y=x-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^4+x^2-1=0, \\ y=x-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{1}{2}, \\ y=x-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y=x-\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ arba } x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Taigi lygčių sistema turi du sprendinius: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Dabar į (5) lygčių sistemą pasižiūrėkime kitaip. Pirmą lygtį padauginę iš 3, o antrą lygtį – iš (–2), sudėję dešinėje pusėje gautume nulį, o kairėje pusėje – reiškinį

$$3(y^2-3xy)-2(x^2-4xy+y^2)=y^2-xy-2x^2.$$

Taigi vieną lygtį, sakykim antrą, galėtume pakeisti *homogenine* lygtimi

$$y^2-xy-2x^2=0$$

ir toliau spręsti lygčių sistemą

$$\begin{cases} y^2-3xy=2, \\ y^2-xy-2x^2=0. \end{cases} \tag{6}$$

Žinome, kad homogeninė lygtis gali būti paranki santykiui tarp y ir x rasti taikant keitinį

$$t=\frac{y}{x},\ x\neq 0. \tag{7}$$

Spręsdami homogeninę lygtį $y^2-xy-2x^2=0$, gautume:

$$t^2-t-2=0 \Rightarrow t=-1 \text{ arba } t=2.$$

Vadinasi, $y=-x$ arba $y=2x$.

Na, o toliau (6) sistemą galima spręsti taip:

1) $\begin{cases} y=-x, \\ (-x)^2-3x(-x)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x, \\ x^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ arba $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\begin{cases} y=2x, \\ (2x)^2-3x(2x)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x, \\ -2x^2=2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$

Ats.: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Sprendžiant (5) lygčių sistemą svarbu atkreipti dėmesį į tai, kad ji neturi nė vieno sprendinio, kurio komponentė x lygi nuliui (įrašę į (5) $x=0$, gautume sprendinių neturinčią lygčių $y^2=2$ ir $y^2=3$ sistemą), nes buvo dalijama iš x.

3 pavyzdys. Išspręskime lygčių sistemą su trimis nežinomaisiais

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ xy+2yz+2zx=12. \end{cases} \tag{8}$$

Sprendimas. Iš pradžių prisiminkime trijų dėmenų sumos kvadrato formulę

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca).$$

Iš jos gauname, kad

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca),$$

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}((a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)).$$

Vadinasi, (8) sistemos pirmą lygtį galėtume pakeisti lygtimi

$$(x+y+2z)^2-2(xy+2yz+2zx)=12$$

arba antrą lygtį pakeisti lygtimi

$$(x+y+2z)^2-(x^2+y^2+4z^2)=24.$$

Pakeiskime antrą. Tada gausime:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ (x+y+2z)^2-(x^2+y^2+4z^2)=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ (x+y+2z)^2-12=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ x+y+2z=\pm 6. \end{cases}$$

Toliau:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2+4z^2)-4(x+y+2z)=-12, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(4z^2-8z+4)=0, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2+4(z-1)^2=0, \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2,\ y=2,\ z=1 \\ x+y+2z=6 \end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=2,\ z=1;$$

2) $\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ x+y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2+4z^2)+4(x+y+2z)=-12, \\ x+y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2+(y+2)^2+4(z+1)^2=0, \\ x+y+2z=-6 \end{cases} \Rightarrow x=-2,\ y=-2,\ z=-1.$$

Taigi (8) lygčių sistema turi du sprendinius: (2; 2; 1) ir (–2; –2; –1),

O dabar prisiminkime, kad dviejų dėmenų sumos kvadratas užrašomas formule

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

iš kurios išplaukia, jog

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$

$$ab=\frac{1}{2}((a+b)^2-(a^2+b^2)),$$

ir sugrįžkime prie (8) lygčių sistemos. Pabandykime ją išspręsti taip:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=12, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2+y^2)+(y^2+4z^2)+(4z^2+x^2)=24, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-2xy+y^2)+(y^2-4yz+4z^2)+(4z^2-4zx+x^2)=0, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)^2+(y-2z)^2+(2z-x)^2=0, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ xy+2yz+2zx=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ 4z^2+4z^2+4z^2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y=2z, \\ z=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=2,\ y=2,\ z=1$ arba $x=-2,\ y=-2,\ z=-1.$

Ats.: (2; 2; 1), (–2; –2; –1).

Matome, kad (8) sistemos sprendimas yra gana paprastas, nors kartu ir labai problemiškas, nes lyg ir nesimato, nuo ko pradėti. Tuo labiau, kad ir nežinomųjų trys, o lygtys tik dvi.

Vis dėlto gerai įsidėmėkime vieną, gana paprastą teiginį – gal pravers ir kitą kartą:

Jeigu tarp dviejų, trijų ar daugiau dėmenų nėra nė vieno teigiamo arba nė vieno neigiamo, tai jų suma lygi nuliui tik kai kiekvienas dėmuo lygus nuliui.

4 pavyzdys. Išspręskime lygčių su trimis nežinomaisiais (*x*, *y* ir *z*) sistemą

$$\begin{cases} 3[x]-\{y\}+z=20{,}3\,, \\ 3[y]+5\{z\}-\{x\}=15{,}1\,, \\ \{y\}+\{z\}=0{,}9\,, \end{cases} \qquad (9)$$

jei $x>0$, $y>0$ ir $z>0$; čia $[a]$ yra sveikoji, o $\{a\}$ – trupmeninė skaičiaus *a* dalis.

Sprendimas. Prisiminkime, kad kiekvienas realusis skaičius a užrašomas formule $a=[a]+\{a\}$ ir kad visada $0\le\{a\}<1$. Štai, pavyzdžiui, $[7{,}3]=7$, $\{7{,}3\}=0{,}3$; $[-2{,}4]=-3$, $\{-2{,}4\}=0{,}6$.

Sudėję pirmą ir trečią lygtis, gausime:

$$3[x]+z+\{z\}=21{,}2 \Rightarrow 3[x]+[z]+2\{z\}=21{,}2.$$

Vadinasi, tėra dvi galimybės:

1) $2\{z\}=0{,}2 \;\Rightarrow\; \{z\}=0{,}1;$
2) $2\{z\}=1{,}2 \;\Rightarrow\; \{z\}=0{,}6.$

Jei būtų $\{z\}=0{,}1$, tai iš trečios lygties gautume, kad $\{y\}=0{,}8$, o iš antros lygties galėtume pabandyti rasti $\{x\}$ ir $[y]$:

$$3[y]+5\cdot 0{,}1-\{x\}=15{,}1 \;\Rightarrow\; 3[y]-\{x\}=14{,}6 \;\Rightarrow\; \{x\}=0{,}4, [y]=5.$$

Įrašę į pirmą lygtį žinomus rezultatus, gautume:

$$3[x]-0{,}8+[z]+0{,}1=20{,}3 \;\Rightarrow\; 3[x]+[z]=21 \;\Rightarrow\; [x]=7,[z]=0; [x]=6,[z]=3; [x]=5,[z]=6;$$

$$[x]=4,[z]=9; [x]=3,[z]=12; [x]=2,[z]=15; [x]=1,[z]=18; [x]=0,[z]=21.$$

Taigi gauname aštuonis (9) sistemos sprendinius: (7,4; 5,8; 0,1), (6,4; 5,8; 3,1), (5,4; 5,8; 6,1), (4,4; 5,8; 9,1), (3,4; 5,8, 12,1), (2,4; 5,8; 15,1), (1,4; 5,8; 18,1), (0,4; 5,8; 21,1).

Jei būtų $\{z\}=0{,}6$, iš antros lygties gautume: $3[y]+5\cdot 0{,}6-\{x\}=15{,}1 \;\Rightarrow\; 3[y]=12{,}1+\{x\}$.

Aišku, kad pastaroji lygtis sprendinių neturi, todėl atvejį $\{z\}=0{,}6$ turime atmesti.

Ats.: (7,4; 5,8; 0,1), (6,4; 5,8; 3,1), (5,4; 5,8; 6,1), (4,4; 5,8; 9,1), (3,4; 5,8, 12,1), (2,4; 5,8; 15,1), (1,4; 5,8; 18,1), (0,4; 5,8; 21,1).

TREČIOJI UŽDUOTIS

1. Pirmas žygeivis iš *A* į *B* nueitų per 132 minutes, o antras žygeivis iš *B* į *A* nueitų per 110 minučių. Po kelių minučių pirmas žygeivis susitiktų su antru žygeiviu, jei pastarasis išeitų 22 minutėmis vėliau už pirmą.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^4+y^4=8x^2+2y^2-17, \\ x^2=-4y(x+y). \end{cases}$$

3. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0, \\ x^2+y^2-x+3y=4. \end{cases}$$

4. Apskaičiuokite $\dfrac{x^3}{y^3}$, jei $2(x^2+y^2)=y(4y-3x)$ ir $3(y^2-x^2)=x(7y-5x)$.

5. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+\dfrac{yz}{y+z}=2, \\ y+\dfrac{zx}{z+x}=2 \\ z+\dfrac{xy}{x+y}=1. \end{cases}$$

6. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^3+y^3+z^3=x^4+y^4+z^4. \end{cases}$$

7. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}=\dfrac{3}{xyz}, \\ xy+yz+zx=3. \end{cases}$$

8. Raskite visus realiųjų skaičių trejetus (a; b; c), kurių kiekvienas skaičius yra lygus kitų dviejų skaičių skirtumo kvadratui.

9. Raskite visas realiųjų skaičių x ir y poras (x; y), tenkinančias lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+[y]+\{x\}=5{,}6\,, \\ [x]+y+\{y\}=5{,}2\,, \\ \{x\}+2\{y\}=2; \end{cases}$$

čia $[a]$ yra sveikoji, o $\{a\}$ – trupmeninė skaičiaus a dalis.

10. Raskite visus lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+[y]+\{z\}=1{,}2\,, \\ \{x\}+y+[z]=3{,}4\,, \\ [x]+\{y\}+z=4{,}6 \end{cases}$$

sprendinius (x; y; z), jei $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2021 m. kovo 25 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematikos ir informatikos metodikos katedra, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUN ŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA