LIETUVOS JAUNŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLA

2. TRIKAMPIŲ PANAŠUMAS IR TALIO TEOREMA

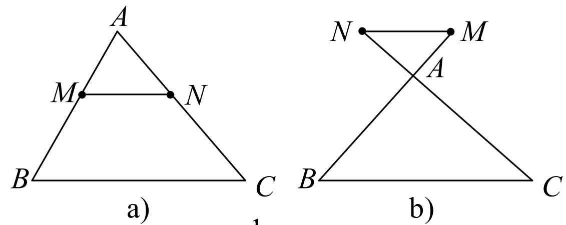
(2020–2022)

Teorinę medžiagą parengė ir antrąją užduotį sudarė Vilniaus universiteto docentas Edmundas Mazėtis

1. Atkarpos AB ir CD yra vadinamos proporcingomis atkarpoms MN ir PQ, jei joms yra teisinga lygybė $\frac{AB}{MN} = \frac{CD}{PQ}$. Analogiškai apibrėžiamas ir didesnio skaičiaus atkarpų proporcingumas.

1 teorema (Talio teorema, Talis iš Mileto, (apie 624 – 548 per. Kr.) – senovės graikų matematikas). Lygiagrečios tiesės, kertančios kampo kraštines (arba jų tęsinius) atkerta jose proporcingas atkarpas.

1 pav. tiesės BC ir MN yra lygiagrečios, todėl atkarpos AM ir AN yra proporcingos atkarpoms AB ir AC, t. y. $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

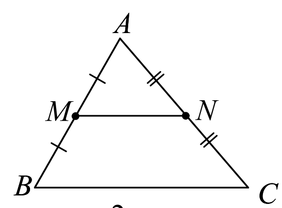


1 pav.

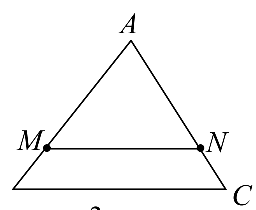
1 išvada. Jei tiesės AB ir MN yra lygiagrečios, tai $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$ (1 pav.).

2 išvada. Jei lygiagrečios tiesės kerta kampo kraštines ir vienoje jų iškerta lygias atkarpas, tai ir kitoje kraštinėje jos iškerta lygias atkarpas (2 pav.).

3 išvada (Talio teoremai atvirkštinė teorema) Jei tiesė MN kerta trikampio ABC kraštines AB ir AC taškuose M ir N taip, kad yra teisinga lygybė $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, tai tiesės BC ir MN yra lygiagrečios (3 pav.).



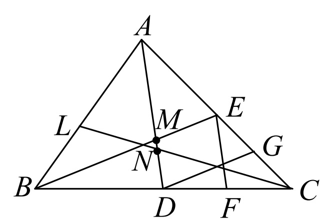
2 pav.



3 pav.

1 pavyzdys. Taikydami Talio teoremą įrodysime, kad trikampio pusiaukraštinės kertasi viename taške, kuriame jos dalijamos santykiu $2:1$ skaičiuojant nuo viršūnės.

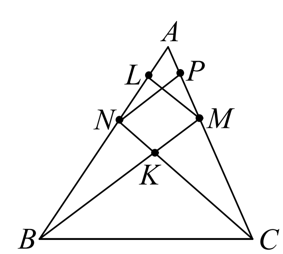
Įrodymas. Sakykime, kad trikampio ABC pusiaukraštinės AD ir BE susikerta taške M, o tiesė EF yra lygiagreti su tiese AD (4 pav.). Kadangi $AE = EC$, tai pagal 2 Talio teoremos išvadą iš čia išplaukia, kad $DF = FC = \frac{1}{4}BC$, taigi $BD:DF = \left(\frac{1}{2}BC\right):\left(\frac{1}{4}BC\right) = 2:1$. Pagal Talio teoremą iš sąlygos $AD \parallel EF$ gauname, kad $BM:ME = BD:DF = 2:1$. Analogiškai nubrėžę $DG \parallel BE$ įrodome, kad $AM:MD = AE:EG = 2:1$. Tarę, kad pusiaukraštinės AD ir CL kertasi taške N, lygiai taip pat įrodome, kad $CN:NL = AN:ND = 2:1$. Bet atkarpoje AD yra vienintelis taškas, kuris dalija ją santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo viršūnės, todėl taškai M ir N sutampa.



4 pav.

2 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinėje AB yra taškas N, o kraštinėje AC – taškas M taip, kad $AN:NB = 2:5$, $AM:MC = 3:4$. Atkarpos BM ir CN susikerta taške K. Rasime santykius $BK:KM$ ir $CK:KN$.

Sprendimas. Per tašką M nubrėžkime tiesę lygiagrečią su tiese CN, kuri kerta kraštinę AB taške L (5 pav.). Pagal Talio teoremą $AL:LN = AM:MC = 3:4$, taigi $LN = \frac{3}{7}AN = \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{7}AB = \frac{6}{49}AB$. Kadangi $ML \parallel KN$, tai vėl pagal Talio teoremą $BK:KM = BN:NL = \frac{5}{7}AB:\frac{6}{49}AB = \frac{35}{6}$. Analogiškai nubrėžę $NP \parallel BM$ turime $AP:PM = AN:NB = 2:5$, $PM = \frac{5}{7}AM = \frac{5}{7}\cdot\frac{3}{7}AC = \frac{15}{49}AC$, $CK:KN = CM:MP = \frac{3}{7}AC:\frac{15}{49}AC = \frac{7}{5}$.



5 pav.

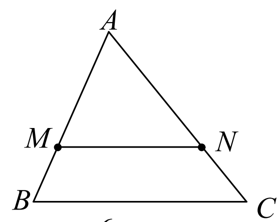
2. Trikampiai yra vadinami panašiaisiais, jei jų atitinkami kampai yra lygūs o prieš lygius kampus esančios kraštinės yra proporcingos. Taigi trikampiai ABC ir $A'B'C'$ yra panašieji, jei $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, o $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, žymima $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2 teorema (trikampių panašumo pagal du lygius kampus požymis). Trikampiai yra panašieji, jei vieno trikampio du kampai lygūs dviems kito trikampio kampams.

3 teorema (trikampių panašumo pagal vieną lygų kampą ir dvi proporcingų kraštinių poras). Trikampiai yra panašieji, jei vieno trikampio dvi kraštinės proporcingos kito trikampio dviems kraštinėms, o kampai tarp šių kraštinių yra lygūs.

4 teorema (trikampių panašumo pagal tris proporcingas kraštines). Trikampiai yra panašieji, jei vieno trikampio trys kraštinės yra proporcingos kito trikampio trims kraštinėms.

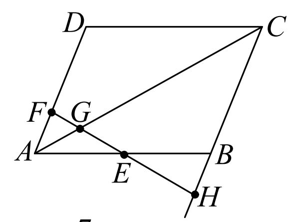
5 teorema. Jei trikampio ABC kraštinėse AB ir AC ar jų tęsiniuose yra taškai M ir N tokie, kad tiesės BC ir MN yra lygiagrečios, tai trikampiai ABC ir AMN yra panašieji (6 pav.).



6 pav.

3 pavyzdys. Taškas E yra lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AB vidurio taškas, taškas F yra kraštinėje AD ir $\frac{AF}{FD} = \frac{1}{3}$. Tiesė EF kerta įstrižainę AC taške G. Rasime santykį $AG\colon GC$.

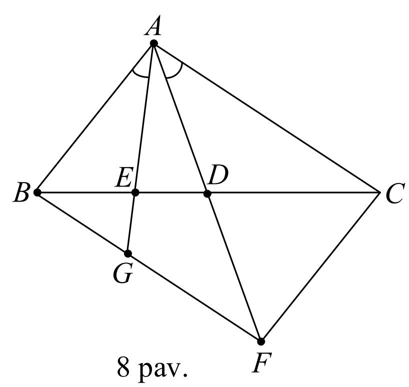
Sprendimas. Sakykime, kad tiesės EF ir BC kertasi taške H (7 pav.). Kadangi $AF \parallel BC$, tai trikampiai AEF ir BEH yra panašieji (5 teorema), todėl $\frac{AF}{BH} = \frac{AE}{EB}$, o kadangi $AE = EB$, tai $AF = BH = \frac{1}{4}AD$, todėl $CH = CB + BH = \frac{5}{4}AD$. Kadangi $CH \parallel AF$, tai $\Delta AFG \sim \Delta CHG$, todėl $\frac{AF}{CH} = \frac{AG}{GC}$. Iš čia $\frac{AG}{GC} = \frac{\frac{1}{4}AD}{\frac{5}{4}AD} = \frac{1}{5}$.



7 pav.

4 pavyzdys. Trikampio ABC kraštinių ilgiai $AB = 13$, $BC = 15$, $AC = 14$. Taškai D ir E yra kraštinėje BC, $CD = 6$, o $\angle BAE = \angle CAD$. Rasime atkarpos BE ilgį.

Sprendimas. Per tašką B nubrėžiame tiesę lygiagrečią su tiese AC, kuri tiesę AD kerta taške F, o tiesę AE – taške G (8 pav.). Kadangi $AC \parallel BF$, tai $\Delta ADC \sim \Delta FDB$, todėl $\frac{AC}{FB} = \frac{DC}{DB}$, taigi $FB = \frac{AC \cdot DB}{DC} = \frac{14\cdot(15-6)}{6} = 21$. Kadangi $\angle BAG = \angle CAD = \angle BFD$, tai trikampiai ABG ir FBA yra panašieji, todėl $\frac{AB}{FB} = \frac{BG}{BA}$, taigi $BG = \frac{AB^2}{FB} = \frac{169}{21}$. Kadangi $AC \parallel BF$, tai $\Delta BGE \sim \Delta CAE$, todėl $\frac{BG}{AC} = \frac{BE}{CE}$. Žymime $BE = x$, tuomet $CE = 15 - x$, todėl $\frac{\frac{169}{21}}{14} = \frac{x}{15-x}$. Iš čia gauname, kad $x = EB = \frac{2535}{463}$.

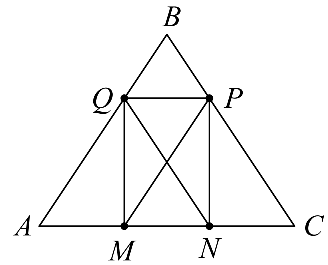


8 pav.

5 pavyzdys. Trikampio kraštinės $AB = 9$, $BC = 15$, į jį įbrėžtas lygiagretainis taip, kad viena jo kraštinė, kurios ilgis lygus 6, yra trikampio kraštinėje AC, o lygiagretainio įstrižainės lygiagrečios su trikampio kraštinėmis AB ir BC. Rasime kitos lygiagretainio kraštinės ir trikampio kraštinės AC ilgius.

Sprendimas. Sakykime, kad $MNPQ$ yra lygiagretainis, kurio kraštinė $MN = 6$ yra trikampio kraštinėje AC, viršūnės P ir Q yra atitinkamai trikampio kraštinėse BC ir AB, tiesė PQ yra lygiagreti su tiese AC, tiesės QN ir PM yra lygiagrečios atitinkamai su trikampio kraštinėmis BC ir AB (9 pav.). Keturkampiai $AMPQ, MNPQ$ ir $NCPQ$ yra lygiagretainiai, todėl $AM = PQ = CN = MN = 6$, tai $AC = 3MN = 18$. Kadangi $PQ \parallel AC$, tai pagal Talio teoremą $\frac{BQ}{BA} = \frac{BP}{BC}$, todėl $\frac{BQ}{BP} = \frac{BA}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. Žymime

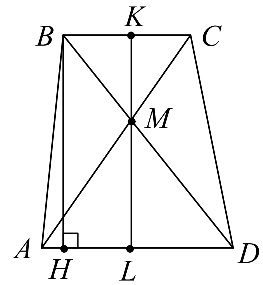
$BQ = 3x,\ BP = 5x$. Kadangi $PM \parallel AB$, tai trikampiai ABC ir MPC yra panašieji, todėl $\frac{BC}{AB} = \frac{PC}{PM} = \frac{BC-BP}{AQ}$, taigi $\frac{15}{9} = \frac{15-5}{9-3x}$. Iš čia $x = 1$, taigi $BQ = 3,\ BP = 5,\ AQ = 6$. Lygiagretainio $MNPQ$ kraštinę QM rasime trikampiams ABC ir AMQ taikydami kosinusų teoremą: $\cos\angle BAC = \frac{AB^2+A\ ^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{5}{9}$, todėl $MQ^2 = AQ^2 + AM^2 - 2\cdot AQ\cdot AM\cdot\cos\angle BAC = 32$, taigi $MQ = 4\sqrt{2}$.



9 pav.

6 pavyzdys. Trapecijos pagrindai lygūs 9 ir 6, aukštinė lygi 10. Rasime atstumus nuo trapecijos įstrižainių susikirtimo taško iki trapecijos pagrindų.

Sprendimas. Sakykime, kad trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 9, BC = 6$, aukštinė $BH = 10$, o įstrižainės AC ir BD kertasi taške M (10 pav.). Kadangi $AD \parallel BD$, tai trikampiai AMD ir CMB yra panašieji, taigi $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{CB} = \frac{3}{2}$. Nubrėžkime trikampių AMD ir BMC aukštines $ML \perp AD,\ MK \perp BC$. Trikampiai AML ir CMK yra taip pat panašieji, todėl $\frac{ML}{MK} = \frac{AM}{CM} = \frac{3}{2}$, taigi $ML = 3x,\ MK = 2x, ML + MK = BH$, todėl $3x + 2x = 10, x = 2, ML = 6,\ MK = 4$.

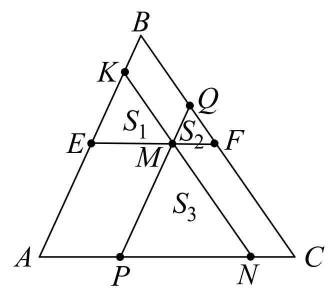


10 pav.

3. Kaip žinome, panašiųjų trikampių plotų santykis lygus jų atitinkamų kraštinių santykio kvadratui: jei $\Delta ABC \sim \Delta NMP$, tai $S_{ABC} : S_{NMP} = AB^2 : NM^2 = AC^2 : NP^2 = BC^2 : MP^2$.

7 pavyzdys. Per trikampio ABC viduje esantį tašką M nubrėžtos trys tiesės, lygiagrečios su trikampio kraštinėmis. Trijų sudaromų trikampių plotai lygūs S_1, S_2 ir S_2 (11 pav.). Rasime trikampio ABC plotą.

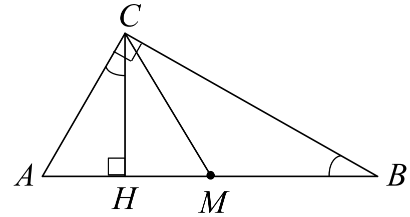
Sprendimas. Sakykime, kad $EF \parallel AC,\ PQ \parallel AB,\ KN \parallel BC$. Trikampiai $EKM, MQF,\ PMN$ ir ABC yra panašieji. Jei trikampio ABC plotas lygus S, tai pagal panašiųjų trikampių plotų santykio savybę yra teisingos lygybės $\frac{S_1}{S} = \frac{EM^2}{AC^2},\ \frac{S_2}{S} = \frac{MF^2}{AC^2},\ \frac{S_3}{S} = \frac{PN^2}{AC^2}$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $EM = \sqrt{\frac{S_1}{S}}AC,\ MF = \sqrt{\frac{S_2}{S}}AC,\ PN = \sqrt{\frac{S_3}{S}}AC$. Kadangi $EM = AP, MF = NC$, tai $EM + PN + MF = AP + PN + NC = AC$, tai įrašę EM, PN ir MF reikšmes turime $\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)AC = AC$, todėl $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$. Taigi trikampio ABC plotas $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.



11 pav.

8 pavyzdys. Atkarpos CH ir CM yra stačiojo trikampio ABC aukštinė ir pusiakraštinė, nubrėžtos į įžambinę (12 pav.), taškas H yra tarp taškų A ir M, o $CM : CH = 5 : 4$. Rasime santykį $AH : AM$.

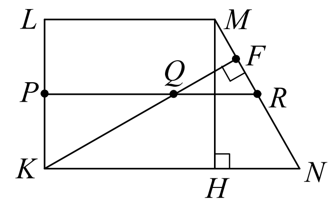
Sprendimas. Žymėkime $AB = c,\ AH = x$, tuomet $BH = c - x$. Stačiojo trikampio pusiaukraštinė, nubrėžta į įžambinę lygi įžambinės pusei, todėl $CM = MA = MB = \frac{c}{2}$, o $CH = \frac{4}{5}CM = \frac{2c}{5}$. Kadangi $\angle ACH = \angle CBH = 90^0 - \angle BAC$, tai statieji trikampiai ACH ir CBH yra panašieji, todėl $\frac{CH}{AH} = \frac{BH}{CH}$, t. y. $CH^2 = AH\cdot BH$. Iš čia gauname, kad $\frac{4}{25}c^2 = x(c-x)$. Šios lygties sprendiniai $x = \frac{1}{5}c$, ir $x = \frac{4}{5}c$, kadangi pagal sąlygą $AH < AM = \frac{c}{2}$, tai antrasis sprendinys netinka. Taigi $AH : AM = \frac{1}{5}c : \frac{1}{2}c = 2 : 5$.



12 pav.

9 pavyzdys. Trapecijos $KLMN$ pagrindų ilgiai $KN = 6,\ LM = 4,\ KL \perp KN,$ atkarpa PR yra trapecijos vidurinė linija, taškas P yra kraštinės KL vidurio taškas. Atkarpoje PR yra taškas Q toks, kad $PQ\colon QR = 4\colon 1$, o tiesės KQ ir MN yra statmenos. Rasime trapecijos $KLMN$ plotą.

Sprendimas. Sakykime, kad tiesės KQ ir MN susikerta taške F ir nubrėžkime trapecijos aukštinę MH (13 pav.). Kadangi trapecijos pagrindai yra 4 ir 6, tai vidurinė linija $PR = 5$, taigi $PQ = 4,\ QR = 1$. Akivaizdu, kad $KH = LM = 4$, todėl $HN = 2$. Statieji trikampiai KFN ir QFR yra panašieji, todėl $\frac{FN}{FR} = \frac{KN}{QR} = \frac{6}{1} = 6$. Kadangi $FN = FR + RN = FR + \frac{1}{2}MN$, tai $FR + \frac{1}{2}MN = 6FR$, t. y. $MN = 10FR$. Kita vertus, statieji trikampiai QFR ir MHN irgi panašieji (nes $\angle QRF = \angle MNH$), todėl $\frac{FR}{HN} = \frac{QR}{MN}$. Iš čia $FR = \frac{HN \cdot QR}{MN} = \frac{2}{MN}$. Iš lygybių $MN = 10FR$ ir $FR = \frac{2}{MN}$ gauname, kad $MN = \sqrt{20}$. Dabar lengvai randame trapecijos aukštinę $MH = \sqrt{MN^2 - HN^2} = 4,$ ir trapecijos plotą $S = \frac{4+6}{2} \cdot 4 = 20.$



13 pav.

ANTROJI UŽDUOTIS

1. Trikampio vidurinė linija EF dalija trikampį ABC į trapeciją $BCNM$ ir trikampį AMN. Raskite trapecijos BCNM ir trikampio AMN vidurinių linijų ilgių santykį.
2. Smailiojo trikampio kraštinių AB ir BC ortogonaliųjų projekcijų tiesėje AC ilgiai lygūs 6 ir 4. Raskite trikampio pusiaukraštinių ortogonaliųjų projekcijų tiesėje AC ilgius.
3. Taškas K yra trikampio ABC pusiaukraštinės AM vidurio taškas, tiesė BK kraštinę AC kerta taške $L,$ o tiesė CK kraštinę AB kerta taške N. Raskite santykį $NL\colon BC$.
4. Taškas N yra trikampio ABC kraštinėje $AC,$ jis tenkina sąlygą $AN\colon NC = 5$. Raskite kokiu santykiu trikampio pusiaukraštinė AM dalija atkarpą BN.
5. Lygiagretainio $ABCD$ kraštinės AD tęsinyje už taško D pažymėtas taškas $P,$ tiesė PB kerta lygiagretainio kraštinę CD taške $Q,$ o įstrižainę AC – taške $R.$ Raskite atkarpos RB ilgį, jei $PQ = 25,$ $QR = 6.$
6. Į trikampį ABC įbrėžtas lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai 3 ir 5, o vienos įstrižainės ilgis lygus 6. Lygiagretainio įstrižainės yra lygiagrečios su trikampio kraštinėmis AB ir $AC,$ o jo trumpesnioji kraštinė yra trikampio kraštinėje BC. Raskite trikampio ABC kraštinių ilgius.
7. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus 72^0, kampo prie pagrindo pusiaukampinės ilgis lygus 1. Raskite trikampio šoninės kraštinės ilgį.
8. Trapecijos pagrindų ilgiai yra 4 ir 12. Tiesė lygiagreti trapecijos pagrindams, eina per jos įstrižainių susikirtimo tašką. Raskite tos tiesės atkarpos, esančios tarp trapecijos šoninių kraštinių, ilgį.
9. Stačiojo trikampio ABC įžambinėje AB yra taškas D, iš jo nubrėžti statmenys DE ir DF atitinkamai į statinius BC ir AC. Trikampio ADF plotas lygus 9, o trikampio BDE plotas lygus 16. Raskite trikampio ABC plotą.
10. Trapecijos $ABCD$ kampai A ir B yra statieji, pagrindų ilgiai $AD = 14, BC = 10,$ taškai M ir N yra šoninių kraštinių AB ir CD vidurio taškai. Iš viršūnės A nuleistas statmuo kraštinei CD kerta atkarpą MN taške K ir $MK\colon KN = 2\colon 1.$ Raskite trapecijos $ABCD$ plotą.

Užduoties sprendimus prašome išsiųsti iki **2021 m. sausio 30 d.** mokyklos adresu: Lietuvos jaunųjų matematikų mokykla, Matematinio švietimo centras, VU Matematikos ir informatikos fakultetas, Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius. Mūsų mokyklos interneto svetainės adresas: http://www.mif.vu.lt/ljmm/

LIETUVOS JAUN ŲJŲ MATEMATIKŲ MOKYKLOS TARYBA